מבוא לאלגברה קומוטטיבית

המרצה: איליה טיומקין

1) תהי $\cdots \to M_{n-1} \xrightarrow{\phi_{n-1}} M_n \xrightarrow{\phi_n} M_{n+1} \to \cdots$ סדרה של הומומורפיזמים של R-מודולים המקיימים $\phi_n \circ \phi_{n-1} = 0$ לכל n. סדרה כזו נקראת *קומפלקס קו-שרשרת*. נסמן $K_n = Ker(\phi_n)$. הוכיחו כי $Im(\phi_n) \subseteq K_{n+1}$ לכל n, וכי הסדרה הנתונה מדויקת אם ורק אם $0 \to K_n \to M_n \xrightarrow{\phi_n} K_{n+1} \to 0$ מדויקת לכל n.
2) תהי $0 \to V_0 \to V_1 \to \cdots \to V_n \to 0$ סדרה מדויקת של מרחבים וקטוריים ממימד סופי מעל שדה F. הוכיחו כי $\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \dim V_i = 0$.
3) הוכיחו את למת התשעה: נתבונן בדיאגרמה קומוטטיבית הבאה בה העמודות והשורה האמצעית הן סדרות מדויקות קצרות. בעזרת למת הנחש הוכיחו כי השורה הראשונה מדויקת אם"ם השורה האחרונה מדויקת.

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & L' & \to & L & \to & L'' & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & M' & \to & M & \to & M'' & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & N' & \to & N & \to & N'' & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & & 0 & &
\end{array}$$

4) תהי $M' \to M \to M'' \to 0$ סדרה של הומומורפיזמים של R-מודולים. הוכיחו כי הסדרה מדויקת אם"ם לכל R-מודול N הסדרה הטבעית $0 \to Hom_R(M'', N) \to Hom_R(M, N) \to Hom_R(M', N)$ מדויקת. <u>רמז:</u> פרשו את הדיוק של הסדרה הנתונה במונחים של קו-גרעין של ההומומורפיזם הראשון.
5) תהי $0 \to M' \to M \to M''$ סדרה של הומומורפיזמים של R-מודולים. הוכיחו כי הסדרה מדויקת אם"ם לכל R-מודול N הסדרה הטבעית $0 \to Hom_R(N, M') \to Hom_R(N, M) \to Hom_R(N, M'')$ מדויקת.

<u>הגדרה:</u> R-מודול P נקרא *פרויקטיבי* אם"ם לכל הומומורפיזם על $\phi: M \twoheadrightarrow N$ של R-מודולים ולכל הומומורפיזם $\psi: P \to N$ קיים הומומורפיזם $\alpha: P \to M$ כך ש- $\phi \circ \alpha = \psi$.

6) יהי P R-מודול. הוכיחו כי התנאים הבאים שקולים:
   א. P פרויקטיבי.
   ב. כל סדרה מדויקת קצרה $0 \to K \to M \to P \to 0$ מתפצלת.
   ג. קיימים קבוצה I ו- R-מודול K כך ש- $K \oplus P = R^{\oplus I}$.
   ד. אם $M' \to M \to M''$ מדויקת אז $Hom_R(P, M') \to Hom_R(P, M) \to Hom_R(P, M'')$ מדויקת.
   ה. כל הומומורפיזם על $M \twoheadrightarrow N$ משרה הומומורפיזם על $Hom_R(P, M) \twoheadrightarrow Hom_R(P, N)$.

<u>הערה:</u> מתרגיל 6 נובע שמודולים חופשיים הם פרויקטיביים. לכן כל מודול הוא מנה של מודול פרויקטיבי. קיים מושג דואלי למודול פרויקטיבי הנקרא מודול *אינג'קטיבי*. נסו להגדירו בעצמכם! בדומה לתרגיל 6, יש סדרה של תנאים השקולים לאינג'קטיביות. אבל אין תיאור פשוט כמו סעיף ג' למודולים אינג'קטיביים, ואפילו להוכיח שכל מודול הוא תת מודול של מודול אינג'קטיבי זו מסימה לא פשוטה. שני המושגים ממלאים תפקיד מרכזי באלגברה הומולוגית.

7) הוכיחו את הגרסה המלאה של למת שנואל האומרת: אם P, P' פרויקטיביים והסדרות $0 \to L \to P \to M \to 0$ ו- $0 \to L' \to P' \to M \to 0$ מדויקות אז $L \oplus P' \simeq L' \oplus P$.
8) נתבונן בתת חוגים של שדה הפונקציות הרציונאליות בשני משתנים $\mathbb{C}(x,y)$: $R = \mathbb{C}[x, xy, xy^2, xy^3, \dots]$ ו- $S = \mathbb{C}[x, y, xy^{-1}, xy^{-2}, \dots]$. הוכיחו כי חוגים אלו אינם נתרים.
9) הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:
   א. אם R חוג ו- x משתנה אז מנתריות של $R[x]$ נובעת נתריות של R.
   ב. תת חוג של חוג נתרי הוא חוג נתרי.
   ג. אם R חוג נתרי אז כל הומומורפיזם על של חוגים $\phi: R \twoheadrightarrow R$ הוא איזומורפיזם.
10) הוכיחו כי אם R חוג נתרי אז גם חוג טורי טיילור $R[\![x]\!]$ נתרי. <u>רמז:</u> בהינתן אידאל $I \subseteq R[\![x]\!]$, התבוננו בסדרה של אידאלים של R המורכבים מהמקדמים a_n של איברי I המתחלקים ב- x^n.