מבוא לאלגברה קומוטטיבית

המרצה: איליה טיומקין

1) יהיו R חוג ו- $I_1, \dots, I_n \subseteq R$ אידאלים. הוכיחו כי
   א. אם R/I_i הוא חוג נתרי לכל i אז $\bigoplus R/I_i$ הוא מודול נתרי מעל R.
   ב. אם $\cap I_i = \{0\}$ אז R הוא חוג נתרי.

<u>הגדרה:</u> יהיו R חוג ו- M R-מודול. אומרים ש- M *ארטיני* אם ורק אם כל שרשרת יורדת של תת מודולים מתייצבת, כלומר אם $M \supseteq M_1 \supseteq M_2 \supseteq \cdots$ אז קיים n כך שלכל $k \geq n$ מתקיים $M_k = M_n$. אומרים שחוג R הוא *ארטיני* אם ורק אם הוא מודול ארטיני מעל עצמו.

2) יהיו R חוג, $M, N, K, M_1, \dots, M_n$ R-מודולים ו- $0 \to K \to M \to N \to 0$ סמ"ק. הוכיחו כי
   א. M ארטיני אם ורק אם כל קבוצה לא ריקה של תת מודולים של M מכילה איבר מינימלי ביחס להכלה.
   ב. M ארטיני אם ורק אם K, N ארטיניים.
   ג. M_i ארטיני לכל i אם ורק אם $\bigoplus M_i$ ארטיני.
3) יהי R חוג ארטיני. הוכיחו כי R תחום שלמות אם ורק אם R שדה. הסיקו מזה שכל אידאל ראשוני בחוג ארטיני הוא אידאל מקסימלי.

<u>הערה:</u> משפט Akizuki אומר שכל חוג ארטיני הוא בהכרח נתרי (בשביל להוכיח את המשפט מראים שבחוג ארטיני יש מספר סופי של אידאלים מקסימליים ושהרדיקאל שלו הוא מודול נתרי). ההפך אינו נכון, למשל $\mathbb{Z}$ הוא חוג נתרי אבל לא ארטיני. כמו כן, לא כל מודול ארטיני הוא מודול נתרי (ראו דוגמה בתרגיל 16.25 בספר של אלטמן וקליימן).

4) יהי R חוג. הוכיחו כי האלגברה $R[x]$ שלמה מעל $S = R[x^2]$. לכל $f \in R[x]$ מצאו $g \in S[Y]$ מתוקן כך ש- $g(f) = 0$.
5) תהי $S \supseteq R$ הכלה של חוגים, ויהיו $x, y \in S$ שלמים מעל R המקיימים משוואות $x^2 = ax + b, y^2 = cy + d$. מצאו $f, g \in R[Z]$ מתוקנים כך ש- $f(x + y) = g(xy) = 0$.
6) הוכיחו כי אם R הוא חוג פריקות יחידה אז R *נורמלי*, כלומר שווה לנורמליזציה שלו.
7) הוכיחו כי הנורמליזציה של $R = \mathbb{C}[x, y]/(y^2 - x^2 - x^3)$ הוא חוג הפולינומים ב- $\frac{y}{x}$.
8) יהי $d \in \mathbb{Z}$ מספר שלם ללא גורמים ראשוניים כפולים, כלומר לא מתחלק באף ריבוע שלם שאינו 1. הוכיחו כי הסגור השלם של $\mathbb{Z}$ ב- $\mathbb{Q}[\sqrt{d}]$ הוא $\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\alpha$ כאשר $\alpha = \begin{cases} \frac{1+\sqrt{d}}{2}, & d \equiv 1 \ (mod\ 4) \\ \sqrt{d}, & \text{אחרת} \end{cases}$.
9) יהי R חוג ותהי G חבורה סופית הפועלת על R, כלומר נתון הומומורפיזם $G \to Aut(R)$. נגדיר את קבוצת האינווריאנטים ע"י $R^G \coloneqq \{x \in R | g(x) = x \ \forall g \in G\}$. הוכיחו כי
   א. R^G הוא תת חוג של R.
   ב. R הוא R^G-אלגברה שלמה. רמז: הראו כי לכל $a \in R$ המקדמים של $\prod_{g \in G}(X - g(a))$ שייכים ל- R^G.
   ג. היעזרו במשפט Artin-Tate ע"מ להוכיח את המשפט הבא של Emmy Noether: אם K שדה, R היא K-אלגברה נוצרת סופית ו- G חבורה סופית הפועלת על R אז R^G היא K-אלגברה נוצרת סופית.
10) נתונות R-אלגבראות $R_1, \dots, R_n$ שלמות מעל R. הוכיחו כי $\prod R_i$ שלמה מעל R.