מבוא לאלגברה קומוטטיבית

המרצה: איליה טיומקין

1) יהי p ראשוני. הוכיחו כי לכל $a \in \mathbb{F}_p$ האלגברה $\mathbb{F}_p[x,y]/(x^p y - xy^p)$ אינה נוצרת סופית כמודול מעל התת אלגברה $\mathbb{F}_p[x-ay]$.

2) יהי k שדה ו- K סגור אלגברי שלו.
   א. יהיו $I \subseteq k[x_1,\dots,x_m]$ אידאל ו- $J \subseteq K[x_1,\dots,x_m]$ האידאל הנוצר ע"י I. הוכיחו כי $I = J \cap k[x_1,\dots,x_m]$.
   רמז: הראו כי אם למערכת משוואות לינאריות עם מקדמים ב- k יש פתרון מעל K אז יש לה גם פתרון מעל k.
   ב. יהיו $f_1,\dots,f_n,g \in k[x_1,\dots,x_m]$ פולינומים כך שלכל $x \in K^m$ מתקיים: אם $\forall i\ f_i(x) = 0$ אז $g(x) = 0$. הוכיחו כי קיימים $h_1,\dots,h_n \in k[x_1,\dots,x_m]$ ו- $N \in \mathbb{N}$ כך ש- $g^N = \sum_i h_i f_i$. האם טענה דומה נכונה גם אם נדרוש רק שלכל $x \in k^m$ מתקיים: אם $\forall i\ f_i(x) = 0$ אז $g(x) = 0$?

3) דטרמיננטת ונדרמונדה (Vandermonde): הוכיחו כי $\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_0 & x_1 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_0^n & x_1^n & \cdots & x_n^n \end{pmatrix} = \prod_{i>j}(x_i - x_j)$.

4) יהיו $v_1,\dots,v_r \in \mathbb{Z}^n \subset \mathbb{R}^n$. הוכיחו כי קיים וקטור $w \in \mathbb{Z}^n$ כך ש- $w \cdot e_1 = 1$ ו- $w \cdot v_i \neq 0$ לכל $1 \leq i \leq r$, כאשר $u \cdot u'$ מסמן את המכפלה הסקלרית הסטנדרטית של u' ו- u ב- $\mathbb{R}^n$.

5) נסו להוכיח את הגרסה החזקה של למת נתר: יהיו k שדה, R k-אלגברה נוצרת סופית ו- $I_1 \subsetneq I_2 \subsetneq \cdots \subsetneq I_r \subsetneq R$ שרשרת של אידאלים ב- R. אז קיימת תת-אלגברה של פולינומים $S = k[t_1,\dots,t_n] \subseteq R$ כך ש- R היא S-מודול נוצר סופית ובנוסף לכל $1 \leq i \leq r$ קיים $1 \leq n_i \leq n$ כך ש- $I_i \cap S = (t_1,\dots,t_{n_i})$.

6) תהי $R \subseteq S$ הרחבה שלמה של חוגים ויהי $I \subset R$ אידאל. הוכיחו כי $IS \cap R \subseteq \sqrt{I}$. האם טענה דומה נכונה גם להרחבות לא שלמות? רמז: התחילו מהמקרה ש- S נוצרת סופית כמודול מעל R והיעזרו בטריק הדטרמיננטלי.

7) יהי $(x^2 - y^7, x^4 - x^2y^5) \subseteq \mathbb{C}[x,y]$ אידאל. מצאו את $V(I)$ ו- $\sqrt{I}$.

8) יהיו k שדה סגור אלגברית ו- $I \subset k[x_1,\dots,x_n]$ אידאל. בנו התאמה טבעית חח"ע ועל בין $V(I)$ לבין $Specm(k[x_1,\dots,x_n]/I)$.

9) קראו את ההוכחה של הגרסה "החזקה עוד יותר" של משפט האפסים של הילברט בספר של אלטמן וקליימן (משפט 15.6) או נסו להוכיח בעצמכם.