מבוא לאלגברה קומוטטיבית

המרצה: איליה טיומקין

1) יהי k שדה סגור אלגברית. מהם רכיבי האי-פריקות של קבותוץ סגורות הבאות $V(J)\subseteq\mathbb{A}^3$? בכל אחד מהמקרים מצאו $f\in I\big(V(J)\big)\setminus J$ אם קיים כזה.
   א. $J=(y^2-x^4,x^2-2x^3-x^2y+2xy+y^2-y)$;
   ב. $J=(xy+yz+xz,xyz)$;
   ג. $J=((x-z)(x-y)(x-2z),x^2-y^2z)$.
2) יהי k שדה סגור אלגברית, ויהיו $f,g\in k[x_1,\dots,x_n]$. הוכיחו כי
   א. אם f אי פריק אז $V(f)$ איפריק;
   ב. אם g אי פריק ו- $f\nmid g$ אז $V(g)\nsubseteq V(f)$;
   ג. אם $f=\prod p_i^{n_i}$ פירוק לגורמים אי פריקים שונים עם ריבוי אז $V(p_i)$ הם רכיבי האי פריקות של $V(f)$;
   ד. אם $f=\prod p_i^{n_i}$ פירוק לגורמים אי פריקים שונים עם ריבוי אז $I\big(V(f)\big)=(\prod p_i)$.
3) יהי R חוג נתרי. הוכיחו כי
   א. המרחב הטופולוגי $Spec(R)$ הוא מרחב טופולוגי נתרי;
   ב. קבוצה סגורה $X\subseteq Spec(R)$ אי פריקה אם ורק אם האידאל $I(X):=\cap_{\mathfrak{p}\in Spec(R)}\mathfrak{p}$ הוא אידאל ראשוני;
   ג. הסגור של $\mathfrak{p}\in Spec(R)$ בטופולוגיית זריסקי הוא $V(\mathfrak{p}):=\{\mathfrak{q}\in Spec(R)|\mathfrak{p}\subseteq\mathfrak{q}\}$.
4) יהי $\phi:R\to S$ הומומורפיזם של חוגים. נגדיר $\psi:Spec(S)\to Spec(R)$ ע"י $\psi(\mathfrak{p})=\phi^{-1}(\mathfrak{p})$. הוכיחו כי ψ היא העתקה רציפה בטופולוגיית זריסקי. העתקות כאלה נקראות מורפיזמים של סכמות אפיניות.
5) יהיו $R=k[x_1,\dots,x_n]/I$ ו- $S=k[x_1,\dots,x_m]/J$ חוגים גיאומטריים, ויהי $\phi:R\to S$ הומומורפיזם של k-אלגבראות. נגדיר $\psi:Specm(S)\to Specm(R)$ ע"י $\psi(\mathfrak{m})=\phi^{-1}(\mathfrak{m})$ (ראינו בכיתה שלפי משפט האפסים של הילברט $\phi^{-1}(\mathfrak{m})$ הוא אידאל מקסימלי). הוכיחו כי
   א. ψ היא העתקה רציפה בטופולוגיית זריסקי. העתקות כאלה נקראות מורפיזמים של יריעות אלגבריות אפיניות.
   ב. קיימים פולינומים $f_1,\dots,f_n\in k[x_1,\dots,x_m]$ כך שאם מזהים את $Specm(S)$ עם $V(J)$ ואת $Specm(R)$ עם $V(I)$ אז $\psi(x_1,\dots,x_m)=(f_1(x_1,\dots,x_m),\dots,f_n(x_1,\dots,x_m))$.
6) תנו דוגמה למרחב טופולוגי נתרי כך ש- $\dim X=\infty$.
7) יהי X מרחב טופולוגי נתרי. הוכיחו כי
   א. יש ל- X מספר סופי של רכיבי אי-פריקות, נסמנם $X_1,\dots,X_n$;
   ב. $\dim X=sup_i\{\dim X_i\}$.
8) תהי $\phi:R\to S$ אלגברה סופית (S נוצרת סופית כמודול מעל R). הוכיחו כי
   א. $\dim Spec(S)\le\dim Spec(R)$;
   ב. תנו דוגמה לאלגברה שאינה סופית כך ש- $\dim Spec(S)>\dim Spec(R)$
   ג. אם ϕ חח"ע אז $\dim Spec(S)\ge\dim Spec(R)$;
   ד. תנו דוגמה לאלגברה שאינה סופית כך ש- ϕ חח"ע אבל $\dim Spec(S)<\dim Spec(R)$.