מבוא לאלגברה קומוטטיבית

המרצה: איליה טיומקין

1) חשבו את הלוקליזציות הבאות
א. $S^{-1}R$ כאשר
i) $R=\mathbb{C}[x], S=\{f|f(1)f(0)\neq 0\}$;
ii) $R=\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, S=\{1,m,m^2,m^3,\dots\}$;
iii) $R=\mathbb{Z}\times\mathbb{C}[x,y]$ ו- S היא קבוצת כל האיברים שאינם מחלקי אפס;
ב. $S^{-1}M$ כאשר
i) $R=\mathbb{Z}$, $S=\{1,2,2^2,2^3,\dots\}$, $M=\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$;
ii) $R=\mathbb{Z}$, $S=\mathbb{Z}\setminus\{0\}$, $M=\bigoplus_{n>0}\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$;
iii) $R=\mathbb{Z}$, $S=\mathbb{Z}\setminus\{0\}$, $M=\prod_{n>0}\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

2) יהיו R חוג, $S\subseteq R$ קבוצה כפלית ו- $\phi: R\to S^{-1}R$ ההומומורפיזם הטבעי. הוכיחו כי
א. $\phi(S)\subseteq (S^{-1}R)^\times$;
ב. (התכונה האוניברסלית של הלוקליזציה) אם $\psi: R\to R'$ הומומורפיזם של חוגים עבורו $\psi(S)\subseteq (R')^\times$ אז קיים ויחיד הומומורפיזם $\alpha: S^{-1}R\to R'$ כך ש- $\psi=\alpha\circ\phi$;
ג. אם $T\subseteq S^{-1}R$ קבוצה כפלית ו- $S\subseteq U=\phi^{-1}(T)$ אז $U^{-1}R=T^{-1}S^{-1}R$. בפרט, אם $\mathfrak{p}\subseteq\mathfrak{q}\subset R$ אידאלים ראשוניים אז $R_{\mathfrak{p}}=\left(R_{\mathfrak{q}}\right)_{\mathfrak{p}R_{\mathfrak{q}}}$.

3) יהיו R חוג ו- $S,T\subseteq R$ קבוצות כפליות כך שלכל $x\in S, y\in T$ קיים n עבורו $y^n\in S, x^n\in T$. הוכיחו כי קיים איזומורפיזם טבעי בין $S^{-1}R$ לבין $T^{-1}R$. בפרט לכל $f\in R$ מתקיים $R_f=R_{f^n}$.

4) יהיו R חוג ו- $S\subseteq R$ קבוצה כפלית. הוכיחו כי $S^{-1}R=0$ אם"ם $S\cap Nil(R)\neq\emptyset$.

5) הוכיחו כי כל חוג ביניים $\mathbb{Z}\subseteq R\subseteq\mathbb{Q}$ הוא לוקליזציה של $\mathbb{Z}$.

6) יהיו $R\subseteq R'$ הרחבה שלמה של חוגים ו- $S\subseteq R$ קבוצה כפלית. הוכיחו כי $S^{-1}R\subseteq S^{-1}R'$ הרחבה שלמה.

7) יהיו R תחום שלמות, $K=Frac(R)$, L/K הרחבה סופית של שדות ו- R' הסגור השלם של R ב- L.הוכיחו כי $L=Frac(R')$.

8) יהיו R חוג, $S\subseteq R$ קבוצה כפלית ו- M R-מודול. הוכיחו כי
א. על M יש מבנה טבעי של $S^{-1}R$-מודול אם"ם $s: M\to M$ הפיך לכל $s\in S$;
ב. אם $s: M\to M$ הפיך לכל $s\in S$ אז $S^{-1}M=M$;
ג. (התכונה האוניברסלית): לכל $S^{-1}R$-מודול N מתקיים: $Hom_R(M,N)=Hom_{S^{-1}R}(S^{-1}M,N)$.

9) יהיו $R\subseteq R'$ תחומי שלמות. נניח כי R' הוא R-אלגברה נוצרת סופית והמימד של $Frac(R')$ מעל $Frac(R)$ הוא סופי. הוכיחו כי קיים $f\in R$ כך ש- R'_f הוא R_f-מודול נוצרת סופית.

10) יהיו R חוג, $S\subseteq R$ קבוצה כפלית ו- M,N R-מודולים. הוכיחו כי
א. אם M נוצר סופית, $m_1,\dots,m_n\in M$ כאלה ש- $\frac{m_1}{1},\dots,\frac{m_n}{1}\in S^{-1}M$ יוצרים את $S^{-1}M$ כמודול מעל $S^{-1}R$ אז קיים $f\in S$ כך ש- $\frac{m_1}{1},\dots,\frac{m_n}{1}\in M_f$ יוצרים את M_f כמודול מעל R_f.
ב. אם M מיוצג סופית ו- $S^{-1}M$ הוא $S^{-1}R$-מודול חופשי מדרגה n אז קיים $f\in S$ כך ש- M_f הוא R_f-מודול חופשי מדרגה n.
ג. ההומומורפיזם הטבעי $S^{-1}Hom_R(M,N)\to Hom_{S^{-1}R}(S^{-1}M,S^{-1}N)$ הוא חח"ע (איזומורפיזם) אם M נוצר סופית (מיוצג סופית). חשבו על דוגמה נגדית לחח"ע\איזומורפיזם עבור מודולים שאינם נוצרים סופית\מיוצגים סופית.