מבוא לאלגברה קומוטטיבית

המרצה: איליה טיומקין

1) יהיו R חוג ו- $U \subseteq Spec(R)$ תת קבוצה פתוחה. הוכיחו כי U קוואזי-קומפקטית (כלומר לכל כיסוי פתוח יש תת כיסוי סופי) אם ורק אם קיים אידאל I נוצר סופית עבורו $U = Spec(R) \setminus V(I)$.
2) יהיו R חוג, M R-מודול. הוכיחו כי אם $\mathfrak{p} \in Supp(M)$ אז $V(\mathfrak{p}) = \bar{\mathfrak{p}} \subseteq Supp(M)$.
3) יהיו $R = \mathbb{Z}$ ו- M R-מודול. מצאו את $Supp(M), Ass(M)$ כאשר
   א. $M = \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$;
   ב. $M = \mathbb{Z} \oplus (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$.
4) יהיו R חוג, M R-מודול ו- $M_1, M_2 \subseteq M$ תת מודולים. הוכיחו או הפריכו את הטענה הבאה: אם $M = M_1 + M_2$ אז $Ass(M) = Ass(M_1) \cup Ass(M_2)$.
5) יהיו R חוג, M R-מודול ו- $N, K \subseteq M$ תת מודולים. הוכיחו כי התנאים הבאים שקולים:
   א. $N = K$;
   ב. קיימים $f_1, \dots, f_r \in R$ עבורם $(f_1, \dots, f_r) = R$ ו- $N_{f_i} = K_{f_i}$ לכל i;
   ג. $N_\mathfrak{p} = K_\mathfrak{p}$ לכל $\mathfrak{p} \in Spec(R)$;
   ד. $N_\mathfrak{m} = K_\mathfrak{m}$ לכל $\mathfrak{m} \in Specm(R)$.
6) יהיו R חוג ו- M R-מודול. הוכיחו כי התנאים הבאים שקולים:
   א. M נוצר סופית;
   ב. קיימים $f_1, \dots, f_r \in R$ עבורם $(f_1, \dots, f_r) = R$ ו- M_{f_i} נוצר סופית מעל R_{f_i} לכל i;
   ג. $M_\mathfrak{p}$ נוצר סופית מעל $R_\mathfrak{p}$ לכל $\mathfrak{p} \in Spec(R)$;
   ד. $M_\mathfrak{m}$ נוצר סופית מעל $R_\mathfrak{m}$ לכל $\mathfrak{m} \in Specm(R)$.
7) כמו 6 עבור התכונה "*מודול מיוצג סופית*".