אנליזה מתקדמת (201-1-0041): עבודת בית מספר 3

שנה"ל תשס"ט, סמסטר סתיו

1. יהי V מרחב וקטורי נורמי, ויהי W תת מרחב וקטורי. הוכח כי $\overline{W}$ (הסגור של W) הוא תת מרחב וקטורי.

2. יהי V מרחב מכפלה פנימית, ויהי W תת מרחב וקטורי כך ש- $\overline{W} = V$. תהי $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ מערכת אורטונורמלית סגורה ב- W. הוכח כי $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ היא מערכת אורטונורמלית סגורה ב- V.

3. יהי V מרחב מכפלה פנימית, יהי $u \in V$, ויהי W תת מרחב וקטורי. נסמן $d = \inf_{w \in W} \|u - w\|$.

3.1. הוכח כי לכל $w', w'' \in W$ מתקיים

$$\|w' - w''\|^2 \leq 2\|w' - u\|^2 + 2\|w'' - u\|^2 - 4d^2.$$

(רמז: הפעל את חוק המקבילית על הוקטורים $w' - u$, $w'' - u$, והשתמש בעובדה כי $\frac{w' + w''}{2} \in W$).

3.2. תהי $\{w_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת וקטורים ב- W המקיימת $\|u - w_n\| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} d$. הוכח כי $\{w_n\}_{n=1}^{\infty}$ היא סדרת קושי.

3.3. יהי V מרחב הילברט, ויהי W תת מרחב וקטורי סגור. הוכח כי קיים $w_0 \in W$ שהוא ההיטל האורטוגונלי של u על W.

4. יהי V מרחב הילברט, ותהי $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ מערכת אורטונורמלית ב- V. הוכח כי לכל $u \in V$ הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \langle u, e_n \rangle e_n$ מתכנס ב- V וסכומו שווה להיטל האורטוגונלי של u על תת המרחב הוקטורי $\overline{\operatorname{span}\{e_n\}_{n=1}^{\infty}}$.

5. בקטע $[0,1]$, נגדיר פונקציות רדמכר (Rademacher) $r_n(x)$ ע"י $r_0(x) \equiv 1$, $r_n(x) = (-1)^{j+1}$ עבור $\frac{j-1}{2^n} \leq t < \frac{j}{2^n}$, $j = 1, \ldots, 2^n$ ($n = 1, 2, \ldots$). נגדיר פונקציות וולש (Walsh) $w_n(x)$ באופן הבא: אם

$$n = \epsilon_l \cdot 2^l + \epsilon_{l-1} \cdot 2^{l-1} + \cdots + \epsilon_2 \cdot 4 + \epsilon_1 \cdot 2 + \epsilon_0$$

הוא פיתוח של n לפי בסיס 2 (כך שכל ϵ_i הוא או 0 או 1), אזי

$$w_n(x) = r_l(x)^{\epsilon_l} \cdots r_0(x)^{\epsilon_0};$$

$w_0(x) \equiv 1$.

5.1. בנה את הגרף של הפונקציות $w_0(x), \ldots, w_7(x)$.

5.2. הוכח כי פונקציות וולש מהוות מערכת אורטונורמלית ב- $L^2_{\mathrm{pc}}[0,1]$.

5.3. הוכח כי זוהי מערכת אורטונורמלית סגורה.

הערה: כל טורי פורייה להלן הם בקטע $[-\pi, \pi]$.

6.1. מצא טור פורייה מרוכב עבור הפונקציה e^{wx} כאשר $w = a + ib \in \mathbb{C}$ ו- $b = \Im w$ איננו מספר שלם.

6.2. מצא טורי פורייה ממשיים עבור הפונקציות $e^{ax}\cos bx$, $e^{ax}\sin bx$, כאשר $a, b \in \mathbb{R}$ ו- b איננו מספר שלם.

7.1. מצא טור פורייה של הפוקציה x^3.

7.2. חשב את סכומי הטורים $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^5}$, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^6}$.

(רמז: היעזר בסעיף הקודם ובטור פורייה של הפונקציה x^2).

8. מצא טור פורייה מרוכב וטור פורייה ממשי של הפונקציה

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \le x < y \\ 1, & y \le x \le \pi \end{cases},$$

כאשר $-\pi < y < \pi$.

9.1. מצא טור פורייה מרוכב וטור פורייה ממשי של הפונקציה $g(x) = f(x+y)$ במונחים של טור פורייה מרוכב וטור פורייה ממשי של $f(x)$, כאשר $y \in \mathbb{R}$ נתון (אנו מניחים כאן כי פונקציה $f(x)$ הנתונה על קטע $[-\pi, \pi]$ הומשכה לפוקציה מחזורית על $\mathbb{R}$ עם מחזור 2π).

9.2. מצא טור פורייה מרוכב של הפונקציה $g(x) = e^{imx}f(x)$ במונחים של טור פורייה מרוכב של $f(x)$, כאשר m מספר שלם נתון.

9.3. מצא טורי פורייה ממשיים של הפונקציות $(\cos mx)f(x)$, $(\sin mx)f(x)$ במונחים של טור פורייה ממשי של $f(x)$, כאשר m מספר שלם חיובי נתון.

10. מצא טור פורייה מרוכב של

$$h(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)g(t)\,dt$$

במונחים של טורי פורייה של $f(x)$ ושל $g(x)$.