משפט פייר (Fejer)

יהי $f(x)$ פונקציה רציפה למקוטעין בקטע $[-\pi,\pi]$,

יהי $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$ טור פוריה של $f(x)$, ויהי

$$S_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-s)\, D_n(s)\, ds$$

(כאן מניחים כבר שהרחבנו את $f(x)$ לפונ' מחזורית עם מחזור 2π על $(-\infty,+\infty)$)

הסכומים החלקיים של טור פוריה

(כאשר $D_n(x) = \frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{\sin\frac{x}{2}}$ הוא גרעין דיריכלה).

ונגדיר כעת הממוצעים החשבוניים

$$\sigma_n(x) = \frac{S_0(x)+S_1(x)+\dots+S_n(x)}{n+1}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-s)\, K_n(s)\, ds$$

כאשר

$$K_n(x) = \frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n} D_j(x)$$

$$= \frac{1}{n+1}\,\frac{1-\cos(n+1)x}{1-\cos x}$$

הוא גרעין פייר.

תכונות של גרעין פייר

1. $K_n(x)\ge 0$ לכל x.

2. $K_n(x)\xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ במ"ש לפי x ב- $[-\pi,-\delta]\cup[\delta,\pi]$

לכל $0<\delta<\pi$.

3. $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K_n(x)\,dx = 1$.

<u>משפט פייר</u>: תהי $f(x)$ פונקציה רציפה על $[-\pi,\pi]$
עם $f(-\pi)=f(\pi)$ (הגדרה שקולה, $f(x)$ פונקציה רציפה על
$(-\infty,+\infty)$ עם מחזור 2π). אזי $\sigma_n(x)\xrightarrow[n\to\infty]{} f(x)$
במ"ש (על $[-\pi,\pi]$ וזו טענה שקולה על $(-\infty,+\infty)$).

<u>הערה חשובה ביותר</u>: בד"כ אין זה נכון כי
$S_n(x)\xrightarrow[n\to\infty]{} f(x)$, ואפילו לא נקודתית - קל וחומר לא במ"ש.

<u>הוכחת משפט פייר</u>:

$$\sigma_n(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-s)\,K_n(s)\,ds$$

$$f(x)=f(x)\cdot 1=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,K_n(s)\,ds$$ ← (שימוש בתכונה 3 של גרעין פייר)

$$\Rightarrow\ \sigma_n(x)-f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[f(x-s)-f(x)\right]K_n(s)\,ds$$

$f(x)$ רציפה ומחזורית על $(-\infty,+\infty)$, לכן

• $f(x)$ חסומה (בע"מ) ע"י המקסימום. נסמן $M=\max|f(x)|$

• $f(x)$ רציפה במ"ש, כך שבהינתן $\varepsilon>0$

יש למצוא $\delta>0$ כך ש-

$$|x-y|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(y)|<\varepsilon/2$$

ע"פ תכונה 2 של גרעין פייר, נבחר n_0 כך שלכל $n>n_0$

ולכל $s\in[-\pi,-\delta]\cup[\delta,\pi]$ מתקיים

$$K_n(s) < \frac{\varepsilon}{4M}$$

לכן לכל $n>n_0$ ולכל x

$$|\sigma_n(x) - f(x)| \le \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x-s)-f(x)|\, K_n(s)\, ds$$

(כי לפי תכונה 1 של גרעין פ"י)

$$= \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\pi}^{-\delta} + \int_{\delta}^{\pi}\right) \underbrace{|f(x-s)-f(x)|}_{\le 2M}\ \underbrace{K_n(s)}_{<\varepsilon/4M}\, ds$$

(כי $s\in[-\pi,-\delta]\cup[\delta,\pi]$)

$$+ \frac{1}{2\pi}\int_{-\delta}^{\delta} \cancel{4f(x)}\ \underbrace{|f(x-s)-f(x)|}_{<\varepsilon/2}\ K_n(s)\, ds$$

(כי $|(x-s)-x|=|s|<\delta$)

$$< \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \varepsilon/2\, ds + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\varepsilon}{2} K_n(s)\, ds = \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

(ולפי תכונה 3 של גרעין פ"י)

לסיכום: בהינתן $\varepsilon>0$ מצאנו n_0 כך שלכל $n>n_0$

ולכל $x\in[-\pi,\pi]$ מתקיים

$$|\sigma_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

לכן $\sigma_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x)$ במ"ש.

<u>הערה חשובה</u>: בהוכחה לא השתמשנו בצורה המפורשת של $K_n(x)$ אלא רק בתכונות 1,2,3 שהוכחו בשלב 2. לכן הוכחנו בעצם את המשפט הכללי הבא:

תהי $\{Q_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה של פונ' רציפות ומחזוריות על $[-\pi,\pi]$ המקיימת:

1. $Q_n(x) \geq 0$ לכל x

2. $Q_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ במ"ש לכל x ב- $[-\pi,-\delta]\cup[\delta,\pi]$ לכל $\pi>\delta>0$.

3. $\int_{-\pi}^{\pi} Q_n(x)\,dx = 1$

אזי לכל פונ' רציפה $f(x)$ על $[-\pi,\pi]$ עם $f(-\pi)=f(\pi)$ מתקיים כי

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x-s)\,Q_n(s)\,ds \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x)$$ במ"ש לכל x.

(במקום סדרה של פונ' $\{Q_n(x)\}$ אפשר לקחת גם משפחה של פונ' התלויה בפרמטר רציף (ואז נשאיף את הפרמטר לגבול סופי או ל- $\pm\infty$).