מערכת האר (Haar)

אנו נעבוד במרחב $L^2_{pc}[0,1]$ של פונקציות רציפות למקוטעין בקטע $[0,1]$ עם מכפלה פנימית

$$\langle f,g\rangle = \int_0^1 f(x)\overline{g(x)}\,dx$$

נגדיר

$$\varphi_0(x)=1 \qquad 0\le x\le 1$$

$$\varphi_1(x)=\begin{cases}1 & 0\le x<\tfrac12\\ -1 & \tfrac12\le x\le 1\end{cases}$$

$$\varphi_2(x)=\begin{cases}\sqrt2 & 0\le x<\tfrac14\\ -\sqrt2 & \tfrac14\le x<\tfrac12\\ 0 & \tfrac12\le x\le 1\end{cases}\qquad \varphi_3(x)=\begin{cases}0 & 0\le x<\tfrac12\\ \sqrt2 & \tfrac12\le x<\tfrac34\\ -\sqrt2 & \tfrac34\le x\le 1\end{cases}$$

ובאופן כללי:

$$\varphi_{2^n+k}(x)=\begin{cases}2^{n/2} & x\in\left[k/2^n,\ k/2^n+1/2^{n+1}\right)\\ -2^{n/2} & x\in\left[k/2^n+1/2^{n+1},\ (k+1)/2^n\right)\\ 0 & \text{אחרת}\end{cases}$$

$n\ge 0,\ k=0,\dots,2^n-1$

במילים אחרות: מגדירים את "מקבץ" הפונקציות $\varphi_{2^n},\varphi_{2^n+1},\dots,\varphi_{2^n+2^n-1}$ בצורה הבאה: נחלק את הקטע $[0,1]$ ל-2^n קטעים באורך 2^{-n}, כל אחת מהפונקציות הנ"ל "חיה" (שונה מ-0) על אחד הקטעים הללו מעבר היא שווה

ו- $2^{n/2}$ על המחצית הראשונה של הקטע ו- $-2^{n/2}$

על המחצית השניה.

$$\|\varphi_n\|^2 = \int_0^1 \varphi_n(x)^2\, dx = (2^{n/2})^2 \cdot \frac{1}{2^n} = 1$$

(ריבוע של קבוע על קטע באורך $1/2^n$.)

כמו-כן, אם $j<n$ אזי על הקטע שבו $\varphi_n(x)$

שונה מ-0 $\varphi_j(x)$ מוגדרת להיות קבוע (אם φ_j שייכת

לגמרי "מחוץ" למה φ_n אזי $\varphi_j(x)=0$ שם, ולמעשה

$\varphi_j(x)$ יכולה להיות 0 או קבוע חיובי או שלילי.) לכן

$$\langle \varphi_n, \varphi_j\rangle = \int_0^1 \varphi_n(x)\varphi_j(x)\, dx = \text{const}\cdot \int_{k/2^n}^{(k+1)/2^n} \varphi_n(x)\, dx$$

$$= 0$$

<u>מסקנה:</u> $\{\varphi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ היא מערכת אורתונורמלית

ב- $L^2_{pc}[0,1]$, הערות מערכת הזאת.

שים לב כי

$$\langle f, \varphi_n\rangle = \int_0^1 f(x)\varphi_n(x)\, dx$$

$$= 2^{n/2}\left(\int_{k/2^n}^{k/2^n + 1/2^{n+1}} f(x)\, dx - \int_{k/2^n + 1/2^{n+1}}^{(k+1)/2^n} f(x)\, dx\right)$$

כלומר עד כדי קבוע, $\overbrace{\langle f, \varphi_n\rangle}^{\text{המקדם}}$ הוא ההפרש

בין ממוצע ערכי $f(x)$ על המחצית הראשונה של

הקירוב של $\varphi_m(x)$ "טוב" לכן ממוצע הערך $f(x)$ על המחצית השנייה של הקטע.

נבדוק מהי הפרישה של מספר סופי של פונקציות מהמערכת הזו.

$$a_0\varphi_0(x)+a_1\varphi_1(x)=\begin{cases} a_0+a_1 & 0\le x<\frac{1}{2} \\ a_0-a_1 & \frac{1}{2}\le x\le 1\end{cases}$$

תהי $g(x)$ פונ' המקבלת ערכים קבועים c_0 ו-c_1 על קטעים $[0,\frac{1}{2})$ ו-$[\frac{1}{2},1]$. נמצא a_0, a_1 כך ש-

$$a_0+a_1=c_0$$
$$a_0-a_1=c_1$$

קל לראות כי $g=a_0\varphi_0+a_1\varphi_1$. כלומר $span\{\varphi_0,\varphi_1\}$ זה אוסף הפונקציות הקבועות על קטעים $[0,\frac{1}{2})$, $[\frac{1}{2},1]$.

באותה צורה ניתן להוכיח כי

$$span\{\varphi_m\}_{m=0}^{2^n-1}$$

זה אוסף הפונקציות הקבועות למקוטעין המקבלות ערכים קבועים על קטעים $[0,\frac{1}{2^n})$, $[\frac{1}{2^n},\frac{2}{2^n})$, ..., $[\frac{2^n-1}{2^n},1]$.

לא מספיק כי הקירוב הטוב ב-L^2 לפונ' f

עד כדי רציפות למקוטעין המוגדרות עבור קבועים 2^{-n} בקטעים
היטל הוא

$$\sum_{m=0}^{2^n-1} \langle f, \varphi_m \rangle \varphi_m(x)$$

<u>משפט:</u> מערכת האר היא מערכת אורתונורמלית סגורה ב- $L^2_{pc}[0,1]$.

<u>הוכחה:</u> יש להראות כי לכל $f\in L^2_{pc}[0,1]$ מתקיים $f\in \overline{\mathrm{span}\{\varphi_m\}_{m=1}^{\infty}}$.

<u>הערה 1:</u> אם V הוא מרחב וקטורי נורמי ו- $W\subseteq V$ הוא תת מרחב וקטורי, אזי גם $\overline{W}$ הוא תת מרחב וקטורי (הוכחה - תרגיל).

<u>הערה 2:</u> יהי $f\in L^2_{pc}[-1,1]$. נכתוב $f=f_1+if_2$ כאשר $f_1=\mathrm{Re}f$, $f_2=\mathrm{Im}f$. מהערה 1 נובע כי אם $f_1,f_2\in\overline{\mathrm{span}\{\varphi_m\}_{m=1}^{\infty}}$ אזי גם $f=f_1+if_2$.

נניח עכשיו כי $f\in L^2_{pc}[-1,1]$ בעלת ערכים ממשיים. אזי ניתן לכתוב $f=f_+-f_-$ כאשר f_+,f_- בעלות ערכים אי-שליליים ($f_+=\frac{f+|f|}{2}$, $f_-=\frac{|f|-f}{2}$); מהערה 1 נובע כי אם $f_-,f_+\in\overline{\mathrm{span}\{\varphi_m\}_{m=1}^{\infty}}$

ואז גם לכן $f=f_+-f_-$.

מסקנה מסעיפים 1 ו-2 היא כי מספיק להוכיח כי לכל f רציפה למקוטעין ואי-שלילית בקטע $[0,1]$ מתקיים $f\in\overline{\text{span}\{\varphi_m\}_{m=1}^{\infty}}$.

כאשר f רציפה למקוטעין אז גם f^2, ולכן $f(x)^2$ אינטגרבילית בקטע $[0,1]$. כלומר, מתנאי 1 סעיף 1 דבר כי לכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך שלכל חלוקה

$$0=a_0<a_1<\dots<a_{k-1}<a_k=1$$

של $[0,1]$ עם $\max\limits_{i=1,\dots,k}(a_i-a_{i-1})<\delta$ מתקיים

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{k}\Big(\sup_{[a_{i-1},a_i]} f(x)^2-\inf_{[a_{i-1},a_i]} f(x)^2\Big)(a_i-a_{i-1})}_{\text{זה הפרש בין סכום דרבו (Darboux) עליון לבין סכום דרבו תחתון}}<\varepsilon \qquad (*)$$

נסמן: $M_i=\sup\limits_{[a_{i-1},a_i]} f(x)$, $m_i=\inf\limits_{[a_{i-1},a_i]} f(x)$

נבחר n גדול כך ש- $1/2^n<\delta$, נקח חלוקה של $[0,1]$ ל- 2^n קטעים שווים, ונבחר $m_i\le c_i\le M_i$. אזי $g(x)$ פונקציה רציפה למקוטעין המוגדרת ע"י c_i על $[\frac{i-1}{2^n},\frac{i}{2^n})$ לפי הגדרה לפני מספר 1, $g\in\text{span}\{\varphi_m\}_{m=0}^{2^n-1}$.

אלא נראה כי $\|f-g\|^2<\varepsilon$. וכיון ש-$\varepsilon>0$ היה שרירותי, נסיק את המבוקש כי $f\in\overline{\mathrm{span}\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}}$.

$$\|f-g\|^2=\int_0^1 (f(x)-g(x))^2\,dx$$

$$(k=2^n)\qquad =\sum_{i=1}^{k}\int_{\frac{i-1}{2^n}}^{i/2^n}(f(x)-c_i)^2\,dx$$

$m_i\le f(x)\le M_i$

ב $[a_{i-1},a_i]$

לכן $(f(x)-c_i)^2\le \cancel{(\;)}\,(M_i-m_i)^2$

$$\le\sum_{i=1}^{k}(M_i-m_i)^2\,\frac{1}{2^n}$$

$$\le\sum_{i=1}^{k}(M_i^2-m_i^2)\,\frac{1}{2^n}<\varepsilon$$

לפי (*)

מש"ל