

אנליזה מתקדמת (201-1-0041): בוחן מספר 1

המרצים: פרופ' מיכאל גיל, פרופ' ויקטור ויניקוב, ד"ר יוסי שטראוס  
שנה"ל תשס"ט, סמסטר סתיו

משך הבחינה: שתיים וחצי  
חומר עזר: אסור.

ענה על ארבע שאלות מתוך חמש. משקל כל שאלה 25 נקודות. הקפד להסביר כל צעד במהלך הפתרון, ולציין את המשפטים והטענות עליהן אתה מסתמך. בהצלחה!

1.1. יהי  $V$  מרחב מכפלה פנימית מעל  $\mathbb{R}$ . הוכח כי לכל  $u, v \in V$  מתקיים

$$\langle u, v \rangle = \frac{1}{4} \|u + v\|^2 - \frac{1}{4} \|u - v\|^2.$$

1.2. יהי  $V$  מרחב וקטורי נורמי מעל  $\mathbb{R}$  בו מתקיים חוק המקבילית:

$$\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2.$$

הוכח כי אפשר להגדיר על  $V$  מכפלה פנימית כך שהנורמה המוגדרת ע"י המכפלה הפנימית זהה לנורמה הנתונה.

2. מצא את כל הערכים של  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$  כך ש-

$$\int_{-1}^1 |x^3 - \alpha - \beta x - \gamma x^2|^2 dx + \int_{-1}^1 |3x^2 - \beta - 2\gamma x|^2 dx$$

יהיה קטן ביותר.

3. תהי  $V$  קבוצת הפונקציות הרציפות על קטע  $(-\infty, +\infty)$  המקיימות

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 e^{-x^2} dx < +\infty.$$

3.1. הוכח כי  $V$ , עם הפעולות הרגילות של חיבור פונקציות וכפל פונקציה בסקלר, הוא מרחב וקטורי, ו- $V$  הוא מרחב מכפלה פנימית עם מכפלה פנימית

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \overline{g(x)} e^{-x^2} dx.$$

3.2. הוכח כי כל הפולינומים שייכים ל- $V$ .

3.3. מצא את ההיטל האורתוגונלי של  $x^3$  על מרחב הפולינומים מדרגה 2 לכל היותר.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi} \text{ תזכורת:}$$

4. יהי  $V$  מרחב וקטורי של פונקציות רציפות בקטע  $[a, b]$  וגזירות שם למעט אולי מספר סופי של נקודות, כאשר הנגזרת רציפה למקוטעין.

4.1. הוכח כי

$$\langle f, g \rangle = f(a)\overline{g(a)} + \int_a^b f'(x)\overline{g'(x)} dx$$

היא מכפלה פנימית על  $V$ .

4.2. לכל  $x_0 \in [a, b]$  נגדיר

$$g_{x_0}(x) = \begin{cases} x - a + 1, & a \leq x \leq x_0 \\ x_0 - a + 1, & x_0 \leq x \leq b \end{cases}$$

הוכח כי לכל  $f \in V$  מתקיים  $\langle f, g_{x_0} \rangle = f(x_0)$ .

4.3. הוכח כי לכל  $f \in V$  ולכל  $x_0 \in [a, b]$  מתקיים  $|f(x_0)| \leq \sqrt{b-a+1} \cdot \|f\|$ .

4.4. נניח כי  $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} f$  בנורמה של  $V$  ( $f \in V, \{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq V$ ). הוכח כי

$$f_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} f(x) \text{ במידה שווה על } [a, b]$$

5. תהי  $V$  קבוצת הפונקציות הרציפות על קטע  $(-\infty, +\infty)$  המקיימות

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx < +\infty.$$

5.1. הוכח כי  $V$ , עם הפעולות הרגילות של חיבור פונקציות וכפל פונקציה בסקלר, הוא

מרחב וקטורי, ו- $V$  הוא מרחב מכפלה פנימית עם מכפלה פנימית

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\overline{g(x)} dx.$$

5.2. תן דוגמה לסדרה  $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq V$  כך ש- $f_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$  במידה שווה על  $(-\infty, +\infty)$

אבל  $f_n \not\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$  בנורמה של  $V$ .