פתרון של בוחן מס' 1

1.1. נחשב את הצד הימין תוך שימוש בהגדרה של נורמה על מכח מכפלה פנימית ובהתאמה של מכפלה פנימית (נזכר כי אנו מעל $\mathbb{R}$, כך ש- $\langle v,u\rangle = \langle u,v\rangle$):

$$\frac{1}{4}\|u+v\|^2 - \frac{1}{4}\|u-v\|^2$$

$$= \frac{1}{4}\langle u+v, u+v\rangle - \frac{1}{4}\langle u-v, u-v\rangle$$

$$= \frac{1}{4}\left(\cancel{\langle u,u\rangle} + \langle v,u\rangle + \langle u,v\rangle + \cancel{\langle v,v\rangle}\right)$$

$$- \frac{1}{4}\left(\cancel{\langle u,u\rangle} - \langle v,u\rangle - \langle u,v\rangle + \cancel{\langle v,v\rangle}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\cdot 4 \cdot \langle u,v\rangle = \langle u,v\rangle$$

כפי שרצינו.

1.2. נניח ~~[illegible]~~

$$\langle u,v\rangle = \frac{1}{4}\|u+v\|^2 - \frac{1}{4}\|u-v\|^2$$

אז נראה כי זהו מכפלה פנימית על V המשרה את הנורמה הנתונה.

נשים לב כי

$$\langle u,u\rangle = \frac{1}{4}\|u+u\|^2 - \frac{1}{4}\|u-u\|^2 = \frac{1}{4}\|2u\|^2 - \frac{1}{4}\|0\|^2$$

$$= \|u\|^2$$

לכן $\langle u,u\rangle \geq 0$ ו- $\langle u,u\rangle = 0 \iff \|u\| = 0 \iff u = 0$.

לכן רק נוכיח כי מתקיים:

(1) $\langle u,v\rangle = \langle v,u\rangle$

(2) $\langle \alpha u,v\rangle = \alpha\langle u,v\rangle$

(3) $\langle u'+u'',v\rangle = \langle u',v\rangle + \langle u'',v\rangle$

נוכיח את הטענה.

הוכחה ל (1):

$$\langle v,u\rangle = \frac{1}{4}\|v+u\|^2 - \frac{1}{4}\|v-u\|^2$$

$$= \frac{1}{4}\|u+v\|^2 - \frac{1}{4}\|u-v\|^2 = \langle u,v\rangle$$

הוכחה ל (3):

$$\cancel{\langle u'+u'',v\rangle = \frac{1}{4}\|u'+u''+v\|^2 - \frac{1}{4}\|u'+u''-v\|^2}$$

$$\langle u',v\rangle + \langle u'',v\rangle = \frac{1}{4}\|u'+v\|^2 - \frac{1}{4}\|u'-v\|^2$$

$$+ \frac{1}{4}\|u''+v\|^2 - \frac{1}{4}\|u''-v\|^2$$

$$= \frac{1}{4}\underbrace{\left(\|u'+v\|^2 + \|u''+v\|^2\right)}_{\frac{1}{2}\left(\|u'+u''+2v\|^2 + \cancel{\|u'-u''\|^2}\right)} - \frac{1}{4}\underbrace{\left(\|u'-v\|^2 + \|u''-v\|^2\right)}_{\frac{1}{2}\left(\|u'+u''-2v\|^2 + \cancel{\|u'-u''\|^2}\right)}$$

לפי כלל המקבילית

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\|u'+u''+2v\|^2 - \frac{1}{4}\|u'+u''-2v\|^2\right)$$

$$= \frac{1}{2}\langle u'+u'', 2v\rangle$$

אם נציב במקום $u'=u,\ u''=0$ ונשתמש רק ב כפי

כי נקבל מיד $\langle 0,v\rangle = \frac{1}{4}\|0+v\|^2-\frac{1}{4}\|0-v\|^2=0$ שגם כי

$$\langle u,v\rangle = \frac{1}{2}\langle u,2v\rangle$$

אז $\langle u,2v\rangle = 2\langle u,v\rangle$

ומכאן לסיום

$$\langle u',v\rangle+\langle u'',v\rangle = \frac{1}{2}\langle u'+u'',2v\rangle$$
$$=\frac{1}{2}\cdot 2\langle u'+u'',v\rangle$$
$$=\langle u'+u'',v\rangle$$

כפי שרצינו ב-(3).

עכשיו להוכיח את (2) נוכיח תחילה באינדוקציה

על $n\in\mathbb{N}$ כי

$$\langle nu,v\rangle = n\langle u,v\rangle$$

בסיס האינדוקציה — ואז $n=1$ — אין מה להוכיח.

נניח כי $\langle nu,v\rangle = n\langle u,v\rangle$ ונוכיח,

$$\langle (n+1)u,v\rangle = \langle nu+u,v\rangle \underset{\text{לפי (3)}}{=} \langle nu,v\rangle+\langle u,v\rangle$$
$$= n\langle u,v\rangle+\langle u,v\rangle = (n+1)\langle u,v\rangle$$

כמו כן נובע כי $\underset{\langle 0,v\rangle}{\langle 0\cdot u,v\rangle} = \underset{0}{0\,\langle u,v\rangle}$ ולכן גם

$$\langle u,v\rangle+\langle -u,v\rangle = \langle u+(-u),v\rangle = \langle 0,v\rangle = 0$$

$$\Rightarrow \langle -u, v\rangle = -\langle u, v\rangle$$

ולכן $\langle nu, v\rangle = n\langle u, v\rangle$ לכל $n\in\mathbb{Z}$.

כמו כן, לכל $m\in\mathbb{N}$

$$\cancel{\langle mu, v\rangle = m\langle u, v\rangle}$$

$$\Rightarrow \langle m\cdot\tfrac{1}{m}u, v\rangle = m\langle \tfrac{1}{m}u, v\rangle$$

$$\Rightarrow \langle \tfrac{1}{m}u, v\rangle = \tfrac{1}{m}\langle u, v\rangle$$

ולכן לכל $r=\frac{m}{n}\in\mathbb{Q}$

$$\langle ru, v\rangle = \langle \tfrac{n}{m}u, v\rangle = n\langle \tfrac{1}{m}u, v\rangle = \tfrac{n}{m}\langle u, v\rangle = r\langle u, v\rangle$$

לסיום, יהי $\alpha\in\mathbb{R}$. אזי, קיימת סדרה $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}\subseteq\mathbb{Q}$ של מספרים רציונליים המתכנסת ל-α.

$$\langle \alpha u, v\rangle = \tfrac{1}{4}\|\alpha u + v\|^2 - \tfrac{1}{4}\|\alpha u - v\|^2$$

$\rightarrow$ לפי רציפות $\|\lim u_n\| = \lim\|u_n\|$

$$= \tfrac{1}{4}\lim_{n\to\infty}\|r_n u + v\|^2 - \tfrac{1}{4}\lim_{n\to\infty}\|r_n u - v\|^2$$

$$= \cancel{\langle r_n u, v\rangle} \lim_{n\to\infty}\langle r_n u, v\rangle$$

$$= \lim_{n\to\infty} r_n\langle u, v\rangle = \alpha\langle u, v\rangle$$

כך הוכחנו את הבדיקה של (2) ואת סוף ההוכחה.

2. א) במרחב הוקטורי ~~ב~~ $C[-1,1]$ נגדיר מכפלה פנימית

$$\langle f,g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)\overline{g(x)} + \int_{-1}^{1} f'(x)\overline{g'(x)}\,dx \quad (\$)$$

עליך להראות שזו אכן מכפלה פנימית.
ב) חשב את המינימום של הביטוי הבא

$$\cancel{A}\ \|x^3-\alpha-\beta x-\gamma x^2\|^2$$

עם ש- $\alpha+\beta x+\gamma x^2$ הוא ההיטל האורתוגונלי של x^3
על תת מרחב וקטורי של פולינומים ממעלה 2 לכל
היותר.

נראה ש $(\$)$ מגדירה מכפלה פנימית על
$C[-1,1]$:

$$\langle g,f\rangle = \int_{-1}^{1} g(x)\overline{f(x)}\,dx + \int_{-1}^{1} g'(x)\overline{f'(x)}\,dx$$

$$= \overline{\int_{-1}^{1} f(x)\overline{g(x)}\,dx + \int_{-1}^{1} f'(x)\overline{g'(x)}\,dx} = \overline{\langle f,g\rangle}$$

$$\langle \alpha f,g\rangle = \int_{-1}^{1} \alpha f(x)\overline{g(x)}\,dx + \int_{-1}^{1} \alpha f'(x)\overline{g'(x)}\,dx = \alpha\langle f,g\rangle$$

$$\langle f_1+f_2,g\rangle = \int_{-1}^{1} (f_1(x)+f_2(x))\overline{g(x)}\,dx + \int_{-1}^{1} (f_1'(x)+f_2'(x))\overline{g'(x)}\,dx$$

$$= \langle f_1,g\rangle + \langle f_2,g\rangle$$

פתרון

$$\langle f,f\rangle = \int_{-1}^{1}|f(x)|^2dx + \int_{-1}^{1}|f'(x)|^2dx \geq 0$$

אבל $\langle f,f\rangle=0$ אז ~~גם~~ גם $\int_{-1}^{1}|f(x)|^2dx=0$

אבל מכיוון ש-$f(x)$ רציפה $f(x)=0$ לכל x, ולכן $f=0$.

ע"פ תהליך גרם-שמידט על פולינומים ממעלה

קטנה או שווה 2 (בסיס סטנדרטי) $\{1,x,x^2\}$:

$$\langle 1,1\rangle = \int_{-1}^{1}dx = 2 \Rightarrow p_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$p_2' = x - \langle x, p_1\rangle p_1$$

$$= x - \underbrace{\left(\int_{-1}^{1}x\cdot\frac{1}{\sqrt2}dx\right)\frac{1}{\sqrt2}}_{\cancel{\frac{1}{\sqrt2}\frac{x^2}{2}\Big|_{-1}^{1} = \frac{1}{2\sqrt2}-\frac{1}{2\sqrt2}}} = x$$

$=0$ כי זו אי-זוגית

(מעל קטע סימטרי)

$$\langle x,x\rangle = \int_{-1}^{1}x^2dx + \int_{-1}^{1}dx = \frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{1} + 2$$

$$= \frac{8}{3}$$

$$p_2 = \frac{p_2'}{\|p_2'\|} = \frac{x}{\sqrt{\frac{8}{3}}} = \sqrt{\frac{3}{8}}\,x$$

$$p_3' = x^2 - \langle x^2, p_1\rangle p_1 - \langle x^2, p_2\rangle p_2$$

$$= x^2 - \underbrace{\left(\int_{-1}^{1} x^2 \cdot \tfrac{1}{\sqrt{2}}\,dx\right) \tfrac{1}{\sqrt{2}}}_{\frac{1}{2}\frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{1} = \frac{1}{3}} - \underbrace{\left(\int_{-1}^{1} x^2 \cdot \sqrt{\tfrac{3}{8}}\,x\right)}_{\text{האינטגרל שווה ל-0 (כלומר אי זוגית)}} \sqrt{\tfrac{3}{8}}\,x$$

$$= x^2 - \frac{1}{3}$$

$$\langle x^2 - \tfrac{1}{3}, x^2 - \tfrac{1}{3}\rangle = \int_{-1}^{1} (x^2 - \tfrac{1}{3})^2\,dx + \int_{-1}^{1} (2x)^2\,dx$$

$$= \int_{-1}^{1} \left(x^4 - \tfrac{2}{3}x^2 + \tfrac{1}{9}\right)dx + \int_{-1}^{1} 4x^2\,dx$$

$$= \frac{x^5}{5}\Big|_{-1}^{1} + \frac{10}{3}\,\frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{1} + \frac{1}{9}\cdot 2$$

$$= \frac{2}{5} + \frac{20}{9} + \frac{2}{9} = \frac{18}{45} + \frac{110}{45} = \frac{128}{45}$$

$$p_3 = \frac{p_3'}{\|p_3'\|} = \sqrt{\frac{45}{128}}\left(x^2 - \frac{1}{3}\right)$$

לכן ההיטל האורתוגונלי המבוקש הוא:

$$\langle x^3, p_1\rangle p_1 + \langle x^3, p_2\rangle p_2 + \langle x^3, p_3\rangle p_3$$

$$= \cancel{\left(\int_{-1}^{1} x^3 \cdot \tfrac{1}{\sqrt{2}}\,dx\right)\tfrac{1}{\sqrt{2}}} + \left(\int_{-1}^{1} x^3 \sqrt{\tfrac{3}{8}}\,x\,dx + \int_{-1}^{1} 3x^2 \cdot \sqrt{\tfrac{3}{8}}\,dx\right) \cdot \sqrt{\tfrac{3}{8}}\,x$$

$$+ \left(\cancel{\int_{-1}^{1} x^3 \sqrt{\tfrac{45}{128}}\left(x^2 - \tfrac{1}{3}\right)dx} + \cancel{\int_{-1}^{1} 3x^2 \sqrt{\tfrac{45}{128}}\, 2x\,dx}\right).$$

$$\cdot \sqrt{\frac{45}{128}} \left(x^2 - \frac{1}{3}\right)$$

$$= \frac{3}{8}\left(\cancel{\ } \frac{x^5}{5}\Big|_{-1}^{1} + 3\,\frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{1}\right) x$$

$$\cancel{+\frac{45}{128}x}$$

$$= \underbrace{\frac{3}{8}\left(\frac{2}{5} + 2\right)}_{\frac{3}{8}\cdot\frac{12}{5} = \frac{36}{40} = \frac{9}{10}} x = \frac{9}{10} x$$

לכן המקדמים המבוקשים הם: $\alpha = 0,\ \beta = \frac{9}{10},\ \gamma = 0$

3.1. נבדוק שעבור כל $A>0$ מכפלה פנימית על $C[-A,A]$:

$$\langle f,g\rangle = \int_{-A}^{A} f(x)\overline{g(x)}\, e^{-x^2}\, dx \qquad (\$)$$

נראה כי זאת אכן מכפלה פנימית:

$$\langle g,f\rangle = \int_{-A}^{A} g(x)\overline{f(x)}\, e^{-x^2}\, dx = \overline{\int_{-A}^{A} f(x)\overline{g(x)}\, e^{-x^2}\, dx} = \overline{\langle f,g\rangle}$$

$$\langle \alpha f,g\rangle = \int_{-A}^{A} \alpha f(x)\overline{g(x)}\, e^{-x^2}\, dx = \alpha\langle f,g\rangle$$

$$\langle f_1+f_2,g\rangle = \int_{-A}^{A} (f_1(x)+f_2(x))\,\overline{g(x)}\, e^{-x^2}\, dx = \langle f_1,g\rangle + \langle f_2,g\rangle$$

המשך

$$\langle f,f\rangle = \int_{-A}^{A} |f(x)|^2 e^{-x^2}\,dx \ge 0$$

ואם $\langle f,f\rangle = 0$ אזי בהכרח $|f(x)|^2 e^{-x^2}=0$ לכל $x\in[-A,A]$
(כי $|f(x)|^2 e^{-x^2}$ היא רציפה ואי-שלילית), ולכן
$f(x)=0$ לכל x ו- $f=0$.

נסמן עתה ב-V את המכפלה הפנימית הנתונה.
ברור ש~~...~~ האקסיומות של המכפלה הפנימית הן ברורות
כמו כאן ($), עלינו להוכיח כי V הוא
מרחב וקטורי וכי המכפלה הפנימית מוגדרת
היטב.

ברור כי V מרחב וקטורי (כיתר דיוק, תת מרחב
וקטורי של מרחב כל הפונקציות הרציפות על $(-\infty,+\infty)$)
-עלינו להראות סגירות תחת חיבור, וכפל בסקלר:

$f\in V$, $\alpha\in\mathbb{C}$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\alpha f(x)|^2 e^{-x^2}\,dx = |\alpha|^2\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2\,dx < +\infty$$

$f_1, f_2\in V$

עקב טענה לעיל אזי

$$\left(\int_{-A}^{A} |f_1(x)+f_2(x)|^2\,dx\right)^{1/2} \le \left(\int_{-A}^{A} |f_1(x)|^2\,dx\right)^{1/2} + \left(\int_{-A}^{A} |f_2(x)|^2\,dx\right)^{1/2}$$

אי-שוויון המשולש
ב-$C[-A,A]$ עם המכפלה הפנימית ($)

$$\le \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f_1(x)|^2\,dx\right)^{1/2} + \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f_2(x)|^2\,dx\right)^{1/2}$$

הראינו כי האינטגרל מתכנס לכל A ולכן מסיקים כי האינטגרל $\int_{-\infty}^{\infty}|f_1(x)+f_2(x)|^2 e^{-x^2}dx$ מתכנס, כלומר $f_1+f_2\in V$.

נראה כי המכפלה הפנימית מוגדרת היטב. נתון כי לכל $f,g\in V$, האינטגרל $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{g(x)}e^{-x^2}dx$ מתכנס בהחלט:

$$\int_{-A}^{A}|f(x)||\overline{g(x)}|e^{-x^2}dx \le \left(\int_{-A}^{A}|f(x)|^2e^{-x^2}dx\right)^{1/2}\left(\int_{-A}^{A}|g(x)|^2e^{-x^2}dx\right)^{1/2}$$

לפי אי-שוויון קושי שוורץ
המכפלה של $|f|$ ו-$|g|$ ב- $C[-A,A]$
עם המכפלה הפנימית $(*)$

$$\le \left(\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^2e^{-x^2}dx\right)^{1/2}\left(\int_{-\infty}^{\infty}|g(x)|^2e^{-x^2}dx\right)^{1/2}$$

הראינו כי האינטגרל מתכנס לכל A, ולכן מסיקים כי האינטגרל $\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)||\overline{g(x)}|e^{-x^2}dx$ מתכנס, כלומר האינטגרל $\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\overline{g(x)}e^{-x^2}dx$ מתכנס בהחלט.

3.2. נותר לנו להראות כי V הוא מרחב אוקלידי.
מספיק להראות כי לכל n טבעי x^n נמצא ב-V.

ידוע כי $\lim_{n\to\infty}x^n e^{-|x|}=0$, ולכן קיים M כך שלכל $|x|>M$ מתקיים
$|x^n e^{-|x|}|<1 \Rightarrow |x^n|<e^{|x|}$
$\Rightarrow |x^{2n}|e^{-x^2}<e^{-x^2+2|x|}$

שים לב כי $e^{-x^2+2|x|} < e^{-|x|}$ אם $-x^2+2|x| < -|x|$

$0 < x^2 - 3|x|$

אזי, $|x|>3$

לסיכום (ולכן מספיק ע"כ כי $M>3$)

$$\left(\int_{-\infty}^{-M} + \int_{M}^{\infty}\right) |x^{2n}| e^{-x^2} dx$$

$$< \left(\int_{-\infty}^{-M} + \int_{M}^{\infty}\right) e^{-|x|} dx < +\infty$$

ולכן $\int_{-\infty}^{\infty} |x^{2n}| e^{-x^2} dx < +\infty$ ולכן ~~$x^{2n} \in V$~~ והמסקנה:

x^n שייכת ל-V.

3.3. נפעיל תהליך גרם-שמידט על $\{1, x, x^2\}$.

$$\cancel{p_1} \langle 1,1 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

$$\Rightarrow p_1^* = \frac{1}{\sqrt[4]{\pi}}$$

$$p_2' = x - \cancel{\int_{-\infty}^{\infty} x e^{-x^2} dx} \langle x, p_1 \rangle p_1$$

$$= x - \underbrace{\left(\int_{-\infty}^{\infty} x \cdot \frac{1}{\sqrt[4]{\pi}} e^{-x^2} dx\right)}_{\text{פונ' אי-זוגית - האינטגרל מתאפס}} \frac{1}{\sqrt[4]{\pi}} = x$$

$$\langle x, x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-x^2} dx = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot -\frac{1}{2} d(e^{-x^2})$$

$$= -\frac{1}{2}\Big(\underbrace{xe^{-x^2}\Big|_{-\infty}^{\infty}}_{0} - \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx\Big)$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$p_2 = \frac{p_2'}{\|p_2'\|} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt[4]{\pi}}\, x$$

$$p_3' = x^2 - \langle x^2, p_1\rangle p_1 - \langle x^2, p_2\rangle p_2$$

$$= x^2 - \underbrace{\Big(\int_{-\infty}^{\infty} x^2\cdot\frac{1}{\sqrt{\pi}}\overset{e^{-x^2}}{\vee} dx\Big)\frac{1}{\sqrt[4]{\pi}}}_{\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-x^2}dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{1}{2}} - \cancel{\Big(\int_{-\infty}^{\infty} x^2\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt[4]{\pi}}\, x \overset{e^{-x^2}}{\vee} dx\Big)\frac{\sqrt{2}}{\sqrt[4]{\pi}}\, x}$$

$$= x^2 - \frac{1}{2}$$

$$\langle x^2-\tfrac{1}{2}, x^2-\tfrac{1}{2}\rangle = \int_{-\infty}^{\infty}(x^2-\tfrac{1}{2})^2 e^{-x^2}dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}(x^4 - x^2 + \tfrac{1}{4})\, e^{-x^2}dx$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^4 e^{-x^2}dx = \int_{-\infty}^{\infty} x^3\cdot -\frac{1}{2}\, d(e^{-x^2})$$

$$= -\frac{1}{2}\Big(\underbrace{x^3e^{-x^2}\Big|_{-\infty}^{\infty}}_{0} - \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}3x^2dx\Big)$$

$$= \frac{3}{2}\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-x^2}dx = \frac{3}{2}\,\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{3\sqrt{\pi}}{4}$$

$$\langle x^2-\tfrac{1}{2}, x^2-\tfrac{1}{2}\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x^4 e^{-x^2}dx - \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-x^2}dx$$

$$+\frac{1}{4}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx$$

$$= \frac{3\sqrt{\pi}}{4} - \frac{\sqrt{\pi}}{2} + \frac{\sqrt{\pi}}{4}$$

$$= \frac{2\sqrt{\pi}}{4} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$p_3 = \frac{p_3'}{\|p_3'\|} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt[4]{\pi}}\left(x^2-\frac{1}{2}\right)$$

לכן ההטלה האורתוגונלית המבוקשת היא:

$$\langle x^3, p_1\rangle p_1 + \langle x^3, p_2\rangle p_2 + \langle x^3, p_3\rangle p_3$$

$$= \cancel{\left(\int_{-\infty}^{\infty} x^3 \cdot \frac{1}{\sqrt[4]{\pi}} e^{-x^2}dx\right)\frac{1}{\sqrt[4]{\pi}}}$$

$$+\left(\int_{-\infty}^{\infty} x^3 \frac{\sqrt{2}}{\sqrt[4]{\pi}} x\, e^{-x^2}dx\right)\frac{\sqrt{2}}{\sqrt[4]{\pi}}x$$

$$+\cancel{\left(\int_{-\infty}^{\infty} x^3 \frac{\sqrt{2}}{\sqrt[4]{\pi}}\left(x^2-\frac{1}{2}\right) e^{-x^2}dx\right)}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt[4]{\pi}}\left(x^2-\frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(\int_{-\infty}^{\infty} x^4 e^{-x^2}dx\right)x = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\frac{3\sqrt{\pi}}{4}x$$

$$= \frac{3}{2}x$$