4.1. נבדוק את התכונות של המכפלה הפנימית:

$$\langle g,f\rangle = g(a)\overline{f(a)} + \int_a^b g'(x)\overline{f'(x)}\,dx$$

$$= \overline{f(a)\overline{g(a)} + \int_a^b f'(x)\overline{g'(x)}\,dx} = \overline{\langle f,g\rangle}$$

$$\langle \alpha f, g\rangle = \alpha f(a)\overline{g(a)} + \int_a^b \alpha f'(x)\overline{g'(x)}\,dx = \alpha\langle f,g\rangle$$

$$\langle f_1+f_2, g\rangle = (f_1(a)+f_2(a))\overline{g(a)} + \int_{-1}^{1}(f_1'(x)+f_2'(x))\overline{g'(x)}\,dx$$

$$= \langle f_1,g\rangle + \langle f_2,g\rangle$$

חיוביות

$$\langle f,f\rangle = |f(a)|^2 + \int_a^b |f'(x)|^2 dx \geq 0$$

אם $\langle f,f\rangle = 0$ אז $f(a)=0$

וגם $f'(x)=0$ לכל $x\in[a,b]$ (אחרת לא

[illegible]

(כי $\int_a^b |f'(x)|^2 dx \geq 0$ ו- $|f'(x)|^2$

אי שלילית ורציפה (מאינפי)

אבל

$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)\,dt = 0$ לכל $x\in[a,b]$

לכן $f=0$.

4.2. $$\langle f, g_{x_0}\rangle = f(a)\overline{g_{x_0}(a)} + \int_a^b f'(x)\overline{g_{x_0}'(x)}\,dx$$

$$= f(a)\cdot 1 + \int_a^{x_0} f'(x)\,dx$$

$$= f(a) + f(x_0) - f(a) = f(x_0)$$

4.3. לפי הסעיף הקודם

$$|f(x_0)| = |\langle f, g_{x_0}\rangle|$$

$$\leq \|f\|\,\|g_{x_0}\|$$

א"ש קושי-שוורץ

$$\|g_{x_0}\|^2 = |g_{x_0}(c)|^2 + \int_c^b |g'_{x_0}(x)|^2\,dx$$

$$= 1 + \int_c^{x_0} dx = 1 + x_0 - c$$

לכן

$$|f(x_0)| \leq \|f\|\sqrt{1+x_0-c} \leq \|f\|\sqrt{1+b-a}$$

כי $c \leq x_0 \leq b$

4.4. לכל $x \in [c,b]$ מתקיים לפי הסעיף הקודם

$$|f(x) - f_n(x)| \leq \sqrt{b-c+1}\,\|f_n - f\|$$

יהי $\varepsilon > 0$. נתון ש- $f_n \longrightarrow f$ בנורמה של V,

קיים n_0 כך שלכל $n > n_0$ מתקיים

$$\|f_n - f\| < \varepsilon / \sqrt{b-a+1}$$

לכן לכל $n > n_0$ ולכל $x \in [a,b]$ מתקיים

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \sqrt{b-a+1} \cdot \varepsilon / \sqrt{b-a+1} = \varepsilon$$

לכן $f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x)$ במ"ש לכל x ב- $[a,b]$.

1.5. נוכיח תחילה כי V הוא מרחב וקטורי, כיוון שזה תת מרחב וקטורי של מרחב כל הפונקציות הרציפות על $(-\infty,+\infty)$. לכן נראה סגירות של V תחת חיבור ותחת כפל בסקלר.

$f\in V,\ \alpha\in\mathbb{C}$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\alpha f(x)|^2\, dx = \alpha \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2\, dx < +\infty$$

$f_1, f_2 \in V$

לכל $A>0$ מתקיים

$$\left(\int_{-A}^{A} |f_1(x)+f_2(x)|^2\, dx\right)^{1/2} \le \left(\int_{-A}^{A} |f_1(x)|^2\, dx\right)^{1/2} + \left(\int_{-A}^{A} |f_2(x)|^2\, dx\right)^{1/2}$$

לפי אי-שוויון המשולש ב- $C[-A,A]$ עם מכפלה פנימית L^2

$$\le \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f_1(x)|^2\, dx\right)^{1/2} + \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f_2(x)|^2\, dx\right)^{1/2}$$

כיוון שאי-השוויון מתקיים לכל A, אזי מתקיים כי $\int_{-\infty}^{\infty} |f_1(x)+f_2(x)|^2 dx$ מתכנס, כלומר $f_1+f_2\in V$.

נוכיח עכשיו כי המכפלה הפנימית של V מוגדרת היטב - כלומר כי האינטגרל $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{g(x)}\, dx$ מתכנס כאשר $f,g\in V$.

לכל $A>0$ מתקיים

$$\int_{-A}^{A} |f(x)||\overline{g(x)}|\,dx \le \left(\int_{-A}^{A} |f(x)|^2 dx\right)^{1/2} \left(\int_{-A}^{A} |g(x)|^2 dx\right)^{1/2}$$

זה אי-שוויון קושי-שוורץ
ב- $C[-A,A]$ עם מכפלה
פנימית L^2

$$\le \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx\right)^{1/2} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |g(x)|^2 dx\right)^{1/2}$$

כאשר שואפים ב- A לאינסוף מקבלים
כי $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)||\overline{g(x)}|\,dx$ מתכנס ולכן $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{g(x)}\,dx$
מתכנס (בהחלט).

נשאר רק לבדוק את התכונות של המכפלה הפנימית
על V:

$$\langle g,f\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\overline{f(x)}\,dx = \overline{\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{g(x)}\,dx} = \overline{\langle f,g\rangle}$$

$$\langle \alpha f,g\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \alpha f(x)\overline{g(x)}\,dx = \alpha\langle f,g\rangle$$

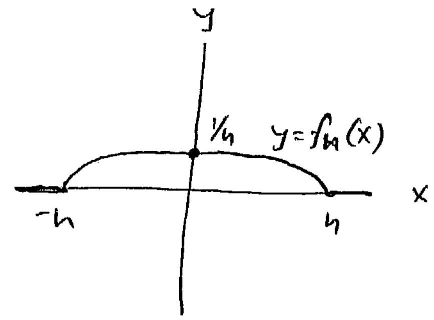
$$\langle f_1+f_2,g\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} (f_1(x)+f_2(x))\overline{g(x)}\,dx = \langle f_1,g\rangle + \langle f_2,g\rangle$$

$$\langle f,f\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2\,dx \ge 0$$

אם $\langle f,f\rangle = 0$ אזי $f(x)=0$ לכל x (כי $|f(x)|^2$
רציפה ואי-שלילית), כלומר, $f=0$.

5.2. נגדיר

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & x \le -n \\ \dfrac{\sqrt{n+x}}{n} & -n < x \le 0 \\ \dfrac{\sqrt{n-x}}{n} & 0 < x \le n \\ 0 & n < x \end{cases}$$



ברור מיד כי f_n כולן רציפות. נחשב

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f_n(x)|^2\,dx = \int_{-n}^{0} \frac{n+x}{n^2}\,dx + \int_0^n \frac{n-x}{n^2}\,dx$$

$$= \frac{1}{n^2}\left(nx + \frac{x^2}{2}\right)\Big|_{-n}^{0} + \frac{1}{n^2}\left(nx - \frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^n$$

$$= \frac{1}{n^2}\left(n^2 - \frac{n^2}{2}\right) + \frac{1}{n^2}\left(n^2 - \frac{n^2}{2}\right) = 1$$

אז $f_n \in V$ לכל n ו- $\|f_n\| = 1$, ולכן $f_n \not\to 0$
בנורמה של V. אולם

$0 \le f_n(x) \le \frac{1}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ לכל x

אז $f_n(x) \to 0$ נק' לכל x ב $(-\infty, +\infty)$.