אנליזה מתקדמת (201-1-0041): בוחן מספר 2

המרצים: פרופ' מיכאל גיל, פרופ' ויקטור ויניקוב, ד"ר יוסי שטראוס
שנה"ל תשס"ט, סמסטר סתיו

משך הבחינה: שעתיים וחצי
חומר עזר: אסור.

ענה על ארבע שאלות מתוך חמש. משקל כל שאלה 25 נקודות. הקפד להסביר כל צעד במהלך הפתרון, ולציין את המשפטים והטענות עליהן אתה מסתמך. בהצלחה!

1.1. תהי $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ מערכת אורטונורמלית סגורה ב- $L^2_{\mathrm{pc}}[0,1]$. הוכח כי לכל $a \in [0,1]$ מתקיים

$$a = \sum_{n=1}^{\infty} \| \int_0^a \phi_n(x)\, dx \|^2.$$

1.2. תהי $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ מערכת אורטונורמלית ב- $L^2_{\mathrm{pc}}[0,1]$. נניח כי לכל $a \in [0,1]$ מתקיים

$$a = \sum_{n=1}^{\infty} \| \int_0^a \phi_n(x)\, dx \|^2.$$

הוכח כי $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ היא מערכת אורטונורמלית סגורה ב- $L^2_{\mathrm{pc}}[0,1]$. (רמז: הראה תחילה כי לכל פונקציה קבועה למקוטעין $g(x)$ מתקיים $g \in \overline{\mathrm{span}\,\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}}$, והיעזר בעובדה כי לכל $f \in L^2_{\mathrm{pc}}[0,1]$ ולכל $\epsilon > 0$ קיימת g קבועה למקוטעין כך ש- $\|f-g\| < \epsilon$.)

2. תהי $f \in L^2_{\mathrm{pc}}[-\pi,\pi]$. חשב (במונחים של f) את ההיטל האורטוגונלי g של f על תת מרחב W של הפונקציות הזוגיות, ומצא טור פורייה ממשי של g במונחים של טור פורייה ממשי של f.

3. תהיינה f ו- g פונקציות רציפות למקוטעין בקטע $[-\pi,\pi]$ עם טורי פורייה מרוכבים $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n e^{inx}$ ו- $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \beta_n e^{inx}$ בהתאמה. נניח כי הטורים $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n$ ו- $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \beta_n$ מתכנסים בהחלט.

3.1. הוכח כי טורי פורייה $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n e^{inx}$ ו- $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \beta_n e^{inx}$ מתכנסים במידה שווה ל- $f(x)$ ול- $g(x)$ בהתאמה.

3.2. יהי $c_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_{n-k}\beta_k$. הוכח כי $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$ הוא טור פורייה מרוכב של הפונקציה $f(x)g(x)$.

4.1. מצא טור פורייה של הפונקציה e^{ax} ($a \in \mathbb{R}$).

4.2. חשב את סכום הטור $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+a^2}$.

5.1. מצא טור פורייה מרוכב של הפונקציה e^{ibx} ($b \in \mathbb{R}$, b איננו מספר שלם).

5.2. מצא טורי פורייה ממשיים של הפונקציות $\cos bx$, $\sin bx$.