בוחן מס' 2 באנליזה מתקדמת - פתרון

1.1. בהינתן $a\in[0,1]$ נגדיר פונקציה $f_a\in L^2_{pc}[0,1]$ ע"י

$$f_a(x)=\begin{cases}1 & 0\le x\le a\\ 0 & a<x\le 1\end{cases}$$

היות ו- $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ מערכת אורתונורמלית סגורה ב- $L^2_{pc}[0,1]$, מתקיים שוויון פרסבל:

$$\|f_a\|^2=\sum_{n=1}^{\infty}|(f,\varphi_n)|^2$$

$$\|f_a\|^2=\int_0^1|f_a(x)|^2dx=\int_0^a 1^2dx=a$$

$$(f,\varphi_n)=\int_0^1 f(x)\overline{\varphi_n(x)}\,dx=\int_0^a\overline{\varphi_n(x)}\,dx$$

$$\Rightarrow\quad a=\sum_{n=1}^{\infty}\left|\int_0^a\varphi_n(x)\,dx\right|^2$$

כפי שנתבקש.

1.2. נגדיר פונקציה $f_a(x)$ כמו בסעיף 1.1.

ואז כפי שמוכח המשפט נקבל השוויון הנתון

$$a = \sum_{n=1}^{\infty} \left| \int_0^a \varphi_n(x)\,dx \right|^2$$

כלומר כי עבור הפונקציה $f_a(x)$ מתקיים שוויון פרסבל

$$\|f_a\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle f, \varphi_n\rangle|^2$$

לכן $f_a \in \overline{\operatorname{span}\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}}$.

מכאן נובע כי לכל $0 \le a < b \le 1$ מתקיים $f_b - f_a \in \overline{\operatorname{span}\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}}$, ולכן שים לב כי

$$f_b(x) - f_a(x) = \begin{cases} 1 & x \in [a,b] \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

לכן כל פונקציה קבועה למקוטעין היא צירוף ליניארי של פונקציות מהצורה $f_b - f_a$, ולכן כל פונקציה קבועה למקוטעין g מתקיים $g \in \overline{\operatorname{span}\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}}$.
(אנו משתמשים כאן בעובדה כי $\overline{\operatorname{span}\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}}$ הוא מרחב ליניארי.)

יהי עכשיו $f \in L^2_{pc}[-1,1]$ ויהי $\varepsilon > 0$. אזי קיימת g קבועה למקוטעין כך ש- $\|f-g\| < \varepsilon/2$, ולפי מה שהוכחנו בסעיף הקודם קיימת $h \in \operatorname{span}\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ כך ש- $\|g-h\| < \varepsilon/2$. לכן

$$\|f-h\| \le \|f-g\| + \|g-h\| < \varepsilon$$

לכן $f \in \overline{\operatorname{span}\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}}$, לכל $f \in L^2_{pc}[-1,1]$,

לכן $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ מערכת אורתונורמלית סגורה.

2. נסמן

$$f(x) = \underbrace{\frac{f(x)+f(-x)}{2}}_{g(x)} + \underbrace{\frac{f(x)-f(-x)}{2}}_{h(x)}$$

ואז $g(x)$ פונ' זוגית ו- $h(x)$ פונ' אי זוגית.

לכל פונ' זוגית $w \in W$ מתקיים

$$\langle h, w\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{h(x)\overline{w(x)}}_{} \, dx = 0$$

מכפלה של פונ' אי זוגית ופונ' זוגית היא פונ' אי זוגית

כך ש- $g \in W$ ו- $h = f - g$ ניצב ל- W.

לכן g היא ההטלה האורתוגונלית של f על W.

ואכן

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

כאשר זהו טור פורייה ממשי של $f(x)$ (ההתכנסות היא במובן של L^2) ואז

$$g(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$$

כלומר זהו טור פורייה ממשי של $g(x)$.

3.1. כיוון ש- $|\alpha_n e^{inx}| \le |\alpha_n|$ לכל x ו- $\sum_{n=-\infty}^{\infty}|\alpha_n|<+\infty$ לפי מבחן ויירשטרס

~~מ~~ ממשפט 2 נובע כי הטור $\sum_{n=-\infty}^{\infty}\alpha_n e^{inx}$ מתכנס

(בהחלט) ובמידה שווה לפונ' רציפה $\tilde{f}(x)$.

התכנסות במידה שווה על $[-\pi,\pi]$ גוררת התכנסות

בכל נורמה של $L^2_{pc}[-\pi,\pi]$, לכן הטור $\sum_{n=-\infty}^{\infty}\alpha_n e^{inx}$

מתכנס ל- $\tilde{f}(x)$ $\underbrace{\text{בנורמה}}_{}$ של $L^2_{pc}[-\pi,\pi]$, ומצד שני הטור מתכנס

בנורמה ל- $f(x)$ (כי זה טור פוריה של $f(x)$),

לכן $f(x)=\tilde{f}(x)$ - כלומר, הטור מתכנס (בהחלט) ובמידה שווה

על $[-\pi,\pi]$ ל- $f(x)$.

ההוכחה זהה עבור $g(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\beta_n e^{inx}$

3.2. מכפלת הטורים

$$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\alpha_n e^{inx}$$

$$g(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\beta_n e^{inx}$$

כיוון ששני הטורים מתכנסים בהחלט ובמידה שווה

על $[-\pi,\pi]$. לכן

$$f(x)\cdot g(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\alpha_n e^{inx}\cdot\sum_{k=-\infty}^{\infty}\beta_k e^{ikx}$$

$$=\sum_{n,k=-\infty}^{\infty}\alpha_n\beta_k e^{inx}e^{ikx}$$

כלומר, בגלל ההתכנסות בהחלט של שני הטורים גם
טור המכפלה מתכנס בהחלט ולכן אין כל משנה איך לסדר
את המחוברים אלה. לכן

$$f(x)\cdot g(x)=\sum_{\ell=-\infty}^{\infty}\ \sum_{n+k=\ell}\alpha_n\beta_k\underbrace{e^{i(n+k)x}}_{e^{i\ell x}}$$

$$n+k=\ell \Rightarrow n=\ell-k$$

$$=\sum_{\ell=-\infty}^{\infty}\underbrace{\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty}\alpha_{\ell-k}\beta_k\right)}_{\text{נגדיר } c_\ell}e^{i\ell x}$$

אז הטור $\sum_{\ell=-\infty}^{\infty}c_\ell e^{i\ell x}$ מתכנס במ"ש על $[-\pi,\pi]$
ל- $f(x)\cdot g(x)$, ולכן זהו טור פורייה של $f(x)\cdot g(x)$.

4.)

$$C_n=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\underbrace{e^{ax}e^{-inx}}_{e^{(a-in)x}}dx$$

$$=\frac{1}{2\pi}\frac{1}{a-in}e^{(a-in)x}\Big|_{x=-\pi}^{x=\pi}\qquad e^{in\pi}=(-1)^n=e^{-in\pi}$$

$$=\frac{1}{2\pi}\frac{1}{a-in}\left(e^{a\pi-in\pi}-e^{-a\pi+in\pi}\right)$$

$$=\frac{1}{2\pi}\frac{(-1)^n}{a-in}\left(e^{a\pi}-e^{-a\pi}\right)$$

4.2. לפי שוויון פרסבל:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{(e^{ax})^2}_{e^{2ax}} dx$$

$$= \frac{1}{2\pi}\,\frac{1}{2a}\, e^{2ax}\Big|_{x=-\pi}^{x=\pi}$$

$$= \frac{1}{4\pi a}\left(e^{2a\pi} - e^{-2a\pi}\right) \qquad (1)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2$$ לפי הסעיף הקודם

$$= \frac{1}{(2\pi)^2}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{|a-in|^2}}_{\frac{1}{a-in}\,\frac{1}{a+in} = \frac{1}{a^2+n^2}} \left(e^{a\pi} - e^{-a\pi}\right)^2$$

$$= \frac{1}{4\pi^2}\left(e^{a\pi} - e^{-a\pi}\right)^2 \left(\frac{1}{a^2} + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a^2+n^2}\right) \qquad (2)$$

מכאן (1) ו-(2)

$$\frac{1}{a^2} + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a^2+n^2} = \frac{\pi}{a}\,\frac{e^{2a\pi} - e^{-2a\pi}}{\left(e^{a\pi} - e^{-a\pi}\right)^2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+a^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{a}\,\frac{e^{2a\pi} - e^{-2a\pi}}{\left(e^{a\pi} - e^{-a\pi}\right)^2} - \frac{1}{a^2}\right)$$

.5.1

$$C_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{e^{ibx} e^{-inx}}_{e^{i(b-n)x}} dx$$

$$= \frac{1}{2\pi} \frac{1}{i(b-n)} e^{i(b-n)x} \Big|_{x=-\pi}^{x=\pi}$$

$$\cancel{= \frac{1}{2\pi} \frac{1}{ib-in}}$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{b-n} \left(e^{ib\pi} \underbrace{e^{-in\pi}}_{(-1)^n} - e^{-ib\pi} \underbrace{e^{in\pi}}_{(-1)^n} \right)$$

$$= \frac{(-1)^n}{\pi} \frac{1}{b-n} \frac{e^{ib\pi} - e^{-ib\pi}}{2i}$$

$$= \frac{(-1)^n}{\pi} \frac{\sin b\pi}{b-n}$$

5.2. לכל b נחשב כעת הקדמים ע"י
ליניאריות של טור ממשי. ב e^{ibx}:

$$a_n = c_n + c_{-n} = \frac{(-1)^n}{\pi} \sin b\pi \underbrace{\left(\frac{1}{b-n} + \frac{1}{b+n} \right)}_{\frac{2b}{b^2-n^2}}$$

$$= (-1)^n \frac{2b \sin b\pi}{\pi(b^2-n^2)}$$

$$b_n = i(c_n - c_{-n}) = i \frac{(-1)^n}{2\pi} \sin b\pi \underbrace{\left(\frac{1}{b-n} - \frac{1}{b+n} \right)}_{\frac{2n}{b^2-n^2}}$$

$$= i(-1)^n \frac{2n \sin b\pi}{b^2-n^2}$$

ולכן $e^{ibx} = \cos bx + i \sin bx$

$$\cos bx = \frac{1}{2} \frac{2b \sin b\pi}{\pi b^2} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2b \sin b\pi}{b^2 - n^2} \cdot \cos nx$$

הוא טור פוריה ממש. של $\cos bx$ [illegible]

$$\sin bx = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n \sin b\pi}{b^2 - n^2} \cdot \sin nx$$

הוא טור פוריה של $\sin bx$.