

אנליזה מתקדמת (201-1-0041): בוחן מספר 3

המרצים: פרופ' מיכאל גיל, פרופ' ויקטור ויניקוב, ד"ר יוסי שטראוס
שנה"ל תשס"ט, סמסטר סתיו

משך הבחינה: שעתיים וחצי
חומר עזר: דף אחד בגודל A4, דו צדדי, ללא הגבלת תוכן.

ענה על ארבע שאלות מתוך חמש. משקל כל שאלה 25 נקודות. הקפד להסביר כל צעד במהלך הפתרון, ולציין את המשפטים והטענות עליהן אתה מסתמך. בהצלחה!

1. תהי $f(x)$ פונקציה רציפה למקוטעין בקטע $[-\pi, \pi]$, יהי $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$ טור פוריה של $f(x)$, יהיו $s_n(x) = \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx}$ הסכומים החלקיים של טור פוריה, ויהיו $\sigma_n(x) = \frac{s_0(x) + \dots + s_n(x)}{n+1}$ הממוצעים החשבוניים שלהם. הוכח כי לכל x מתקיים $\sigma_n(x) \rightarrow \frac{f(x-0) + f(x+0)}{2}$ (מסומן גם $f(x)$) הם כרגיל הגבולות משמאל ומימין של הפונקציה בנקודה x .

2. יהי D תחום במישור המוגבל ע"י מסילה סגורה פשוטה Γ . נניח כי Γ נתונה בצורה פרמטרית ע"י $(x(t), y(t))$, $a \leq t \leq b$, כאשר $x(t)$ ו- $y(t)$ פונקציות רציפות וגזירות ברציפות למקוטעין, וכי

$$x(t) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\alpha_n \cos \frac{2n\pi t}{b-a} + \beta_n \sin \frac{2n\pi t}{b-a} \right),$$

$$y(t) = \frac{\gamma_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\gamma_n \cos \frac{2n\pi t}{b-a} + \delta_n \sin \frac{2n\pi t}{b-a} \right)$$

הם הפיתוחים של $x(t)$ ו- $y(t)$ לטורי פוריה ממשיים. הוכח כי השטח של D שווה ל-

$$\pi \sum_{n=1}^{\infty} n (\alpha_n \delta_n - \beta_n \gamma_n).$$

רמז: השטח שווה לאינטגרל המסילתי $\int_{\Gamma} x dy$.

3.1. תהי $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in \ell^2$, כלומר $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < +\infty$. הוכח כי הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{n}$ מתכנס

בהחלט.

3.2. תהי $f(x)$ פונקציה רציפה על $[-\pi, \pi]$ עם $f(-\pi) = f(\pi)$ הגזירה ברציפות למקוטעין, ויהי $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$ טור פוריה של $f(x)$. הוכח כי הטור $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n$ מתכנס בהחלט.

4. נתבונן בפונקציה

$$f(x) = \begin{cases} Ax + B, & -\pi \leq x < 0 \\ \cos x, & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

- 4.1. מצא את הסכום של טור פוריה של $f(x)$ בנקודות $\pi, \pi/2, 0, -\pi/2, -\pi$.
 4.2. עבור ערכים שונים של A ו- B , מצא באילו תתי קטעים סגורים $[\alpha, \beta] \subseteq [-\pi, \pi]$ טור פוריה של $f(x)$ מתכנס במדה שווה.

5. מצא התמרת פוריה של הפונקציה

$$f(x) = \begin{cases} x, & |x| \leq a \\ 0, & |x| > a \end{cases}$$