בוחן מס' 3 באנליזה מתקדמת (201-1-0041)

פתרון -

1. הגרעין מקיים את שלוש התכונות הבסיסיות של גרעין פייר :

1. $K_n(x)\ge 0$ לכל x

2. $K_n(x)\xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ במ"ש לכל x על $[-\pi,-\delta]\cup[\delta,\pi]$ לכל $\delta>0$

3. $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}K_n(x)\,dx = 1$

ולכן גם כי גרעין פייר $K_n(x)=\frac{1}{n+1}\,\frac{1-\cos(n+1)x}{1-\cos x}$

הוא גם זוגי, לכן מ-3 נובע כי

4. $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0}K_n(x)\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi}K_n(x)\,dx = \frac{1}{2}$

נבדוק עכשיו

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-s)\,K_n(s)\,ds$$

$$\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0} f(x+0)\,K_n(s)\,ds$$

לפי תכונה 4

$$+\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} f(x-0)\,K_n(s)\,ds$$

נניח $\varepsilon>0$. נבחר $\delta>0$ כך ש-

$$x-\delta<y<x \Rightarrow |f(y)-f(x-0)|<\varepsilon/2$$

$$x<y<x+\delta \Rightarrow |f(y)-f(x+0)|<\varepsilon/2$$

עפ"י הלמה 2 נבחר n_0 כך שלכל $n>n_0$ ולכל $s\in[-\pi,-\delta]\cup[\delta,\pi]$.

מתקיים

$$K_n(s)<\varepsilon/4M$$

כאשר $M=\sup_{[-\pi,\pi]}|f(x)|$.

ואז לכל $n>n_0$

$$\left|\sigma_n(x)-\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}\right|$$

$$\leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0}|f(x-s)-f(x+0)|\,\cancel{|}K_n(s)\cancel{|}\,ds$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi}|f(x-s)-f(x+0)|\,\cancel{|}K_n(s)\cancel{|}\,ds$$

(ועכשיו, לא צריך ערך מוחלט עפ"י תכונה 1)

$$=\frac{1}{2\pi}\Bigg(\int_{-\pi}^{-\delta}\underbrace{|f(x-s)-f(x+0)|}_{\leq 2M}\,\underbrace{K_n(s)\,ds}_{\substack{<\varepsilon/4M \\ (s\in[-\pi,-\delta] \text{ כי})}}$$

$$+\int_{\delta}^{\pi}\underbrace{|f(x-s)-f(x+0)|}_{\leq 2M}\,\underbrace{K_n(s)\,ds}_{\substack{<\varepsilon/4M \\ (s\in[\delta,\pi] \text{ כי})}}$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_{-\delta}^{0}\underbrace{|f(x-s)-f(x+0)|}_{<\varepsilon/2}K_n(s)\,ds$$

$(x_0 < x-s < x+\delta$ כי$)$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\delta}\underbrace{|f(x-s)-f(x-0)|}_{<\varepsilon/2}K_n(s)\,ds$$

$(x-\delta < x-s < x$ כי$)$

$$< \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{-\delta}\varepsilon/2\,ds + \frac{1}{2\pi}\int_{\delta}^{\pi}\varepsilon/2\,ds$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_{-\delta}^{0}\frac{\varepsilon}{2}K_n(s)\,ds + \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\delta}\frac{\varepsilon}{2}K_n(s)\,ds$$

$$< \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varepsilon/2\,ds + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varepsilon/2\,K_n(s)\,ds$$

$$= \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

(עפ"י תכונה 3)

לסיכום: לכל $\varepsilon>0$ קיים n_0 כך שלכל $n>n_0$

$$\left|\sigma_n(x)-\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}\right|<\varepsilon$$

כלומר, $\sigma_n(x)\xrightarrow[n\to\infty]{}\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}$

2. [illegible]

$$\int_\Gamma x\,dy=\int_a^b x(t)\,y'(t)\,dt$$

פיתוח פוריה של $x(t)$ בקטע $[a,b]$ נתון:

$$x(t) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\alpha_n \cos \frac{2\pi n t}{b-a} + \beta_n \sin \frac{2\pi n t}{b-a} \right)$$

פיתוח פוריה של $y'(t)$ מתקבל ע"י גזירה איבר-
איבר מפיתוח פוריה של $y(t)$:

$$y'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n\pi}{b-a} \left(\delta_n \cos \frac{2\pi n t}{b-a} - \gamma_n \sin \frac{2\pi n t}{b-a} \right)$$

נשתמש בשוויון פרסבל המוכר לשתי פונ' ממשיות
בקטע $[a,b]$

$$f(t) = \frac{x_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(x_n \cos \frac{2\pi n t}{b-a} + y_n \sin \frac{2\pi n t}{b-a} \right)$$

$$g(t) = \frac{u_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(u_n \cos \frac{2\pi n t}{b-a} + v_n \sin \frac{2\pi n t}{b-a} \right)$$

$$\Rightarrow \int_a^b f(t)\overline{g(t)}\,dt = \frac{b-a}{2} \left(x_0 \overline{u_0} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(x_n \overline{u_n} + y_n \overline{v_n} \right) \right)$$

לכן

$$\int_a^b x(t) y'(t)\,dt = \frac{b-a}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n\pi}{b-a} \left(\alpha_n \delta_n - \beta_n \gamma_n \right)$$

$$= \pi \sum_{n=1}^{\infty} n \left(\alpha_n \delta_n - \beta_n \gamma_n \right)$$

3.1 ℓ^2 הוא מרחב מכפלה פנימית עם מכפ. פנימית

$$\langle \{x_n\}_{n=1}^{\infty}, \{y_n\}_{n=1}^{\infty} \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \overline{y_n}$$

לכן לפי א. שוויון קושי שוורץ

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n| \cdot \frac{1}{n} \le \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty$$

(ולו משתמשים כאן בנתון $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in \ell^2$ ובעובדה הידועה מחזקה 2 כי $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty$), כלומר הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{n}$ מתכנס (בהחלט).

3.2. כלל ש- $f(x)$ רציפה על $[-\pi,\pi]$ עם $f(-\pi)=f(\pi)$ וגזירה ברציפות למקוטעין, אז פורייה של $f'(x)$ מתקבל ע"י גזירה איבר איבר של פורייה של $f(x)$, כלומר טור פורייה של $f'(x)$ הינו

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} i n c_n e^{inx}$$

לכן לפי שוויון פרסבל

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |i n c_n|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f'(x)|^2 dx < +\infty$$

$$\Rightarrow \sum_{n=-\infty}^{-1} n^2 |c_n|^2, \ \sum_{n=1}^{\infty} n^2 |c_n|^2 < +\infty$$

$$\{n c_n\}_{n=1}^{\infty} \in \ell^2 \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} n c_n \cdot \frac{1}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} c_n$$

לפי הסעיף הקודם מתכנס

מתכנס בהחלט, ו-

$$\{-nc_{-n}\}_{n=1}^{\infty}\in \ell^2 \xRightarrow{\text{לפי הסעיף הקודם}} \sum_{n=1}^{\infty} -nc_{-n}\cdot\frac{1}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} -c_{-n}$$

מתכנס בהחלט, ולסיכום $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n$ מתכנס בהחלט.

4. שים לב כי הפונקציה רציפה למעט אולי בנק' 0, ועבור ההמשכה המחזורית ל $f(x)$ על $(-\infty,+\infty)$ בנק' $\pm\pi$.

4.1. בכל שאר הנק' רציפה למקוטעין וגזירה (וגזירה למקוטעין), לכן הטור מתכנס לה עצמה.

$\frac{\pi}{2}$ היא נק' רציפות לכן סכום הטור שווה

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\cos\frac{\pi}{2}=0$$

$-\frac{\pi}{2}$ היא נק' רציפות לכן סכום הטור שווה

$$f\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-A\frac{\pi}{2}+B$$

בנק' $\pm\pi$ סכום הטור שווה ל-

$$\frac{f(-\pi+0)+f(\pi-0)}{2}=\frac{A(-\pi)+B+\cos\pi}{2}=\frac{-\pi A+B-1}{2}$$

בנק' 0 סכום הטור שווה ל-

$$\frac{f(0-0)+f(0+0)}{2}=\frac{A\cdot 0+B+\cos 0}{2}=\frac{B+1}{2}$$

2.4. הטור מתכנס במידה שווה אל f בכל קטע סגור $[\alpha,\beta]$ שאינו מכיל נק' אי רציפות של $f(x)$ (הטור ו- $f(x)$ רציפה. לפי משפט לגבי רציפות למקוטעין).

א. לכן לכל A,B הטור מתכנס במידה שווה אל f בכל $[\alpha,\beta]$ עם
$-\pi<\alpha<\beta<0$
$0<\alpha<\beta<\pi$

ב. ואם הטור רציף ב-0, אזי: $A\cdot 0+B=\cos 0$

$B=1$

ואז הטור מתכנס במידה שווה אל f בכל $[\alpha,\beta]$ עם
$-\pi<\alpha<\beta<\pi$

ג. ואם הטור מקיים $f(-\pi)=f(\pi)$ אזי $A\cdot(-\pi)+B=\cos\pi$

$-\pi A+B=-1$

ואז הטור מתכנס במידה שווה אל f בכל $[\alpha,\beta]$ עם
$-\pi\le\alpha<\beta<0$
$0<\alpha<\beta\le\pi$

ד. לסיום, ואם רק ב' וגם ג' מתקיימים אזי

$B=1,\quad -\pi A+1=-1$
$A=\frac{2}{\pi}$

ואז הטור מתכנס במידה שווה אל f בכל $[\alpha,\beta]\subseteq[-\pi,\pi]$, ובפרט ובעיקר הטור מתכנס במ"ש אל f ב- $[-\pi,\pi]$.

5.

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-i\omega x}\,dx$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-a}^{a} x\, \underbrace{e^{-i\omega x}\,dx}_{\frac{1}{-i\omega}\,d\,e^{-i\omega x}}$$

אינטגרציה בחלקים

$$= \frac{1}{2\pi}\left[x\cdot\frac{1}{-i\omega}\, e^{-i\omega x}\Big|_{-a}^{a} - \int_{-a}^{a}\frac{1}{-i\omega}\, e^{-i\omega x}\,dx\right]$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[-\frac{a e^{-i\omega a} + a e^{i\omega a}}{i\omega} \cancel{+} - \frac{1}{(-i\omega)^2}\, e^{-i\omega x}\Big|_{-a}^{a}\right]$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[-a\,\frac{e^{-i\omega a} + e^{i\omega a}}{i\omega} + \frac{1}{\omega^2}\left(e^{-i\omega a} - e^{i\omega a}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2\pi}\,\cancel{(e^{a}}\left[-a\,\frac{2\cos\omega a}{i\omega} + \frac{1}{\omega^2}\cdot -2i\sin\omega a\right]$$

$$= \cancel{i}\,\cancel{\frac{i}{2\pi}}\,\frac{i}{\pi}\left(\frac{a\cos\omega a}{\omega} - \frac{\sin\omega a}{\omega^2}\right)$$