

אנליזת פורייה להנדסת חשמל (201-1-0041)

בחינה סופית, מועד א', שנה"ל תשע"ב, סמסטר סתיו

המרצים: פרופ' ויקטור ויניקוב, ד"ר יוסי שטראוס, ד"ר אור שליט.

משך הבחינה: שלוש שעות.

חומר עזר: מחשבון פשוט ללא צג גרפי.

ענו על **שלוש** מתוך ארבע השאלות הבאות. משקל כל שאלה 35 נקודות. הקפידו להסביר כל צעד במהלך הפתרון, ולציין את המשפטים והטענות עליהם אתם מסתמכים.

שימו לב: יש לציין אילו שאלות אתם רוצים שנבדוק!

בהצלחה!

שאלה 1

א. (15 נק') תהי $u \in D$, כלומר u פונקציית בוחן, ונסמן ב- \hat{u} את התמרת הפורייה שלה. לכל n נגדיר

$$u_n = \int_{-n}^n e^{-iwx} \hat{u}(-w) dw$$

הוכיחו שהסדרה $\{u_n\}$ מתכנסת במידה שווה לפונקציה u .

ב. (20 נק') תהי $g \in L^1(-\infty, \infty)$, ונסמן ב- \hat{g} את התמרת הפורייה שלה. לכל n נגדיר

$$g_n(x) = \int_{-n}^n \hat{g}(w) e^{iwx} dw$$

הוכיחו שסדרת הדיסטריבוציות הרגולריות המוגדרות ע"י $\{g_n\}$ מתכנסת במובן של דיסטריבוציות לדיסטריבוציה הרגולרית ש- g מגדירה.

שאלה 2

תהי f פונקציה גזירה ברציפות בקטע $[-\pi, \pi]$ (אנו לא מניחים ש- f מחזורית). נסמן ב- a_n, b_n את מקדמי פורייה הממשיים של f .

א. (5 נק') יהי n מספר טבעי, ונסמן $c_j = -\pi + j \frac{2\pi}{n}$ עבור $j = 0, 1, \dots, n-1$.
1. הוכיחו ש-

$$b_n = \frac{1}{\pi} \sum_{j=0}^{n-1} \int_{c_j}^{c_{j+1}} (f(x) - f(c_j)) \sin nx \, dx$$

ב. (20 נק') הוכיחו שקיים M כך שלכל n מתקיים $|b_n| \leq \frac{M}{n}$. (רמז: חשבו את $\int_{c_j}^{c_{j+1}} |\sin nx| \, dx$, וכמו כן השתמשו במשפט הערך הממוצע מחדו"א).

ג. (5 נק') האם קיים N כך שלכל n מתקיים $|a_n| \leq \frac{N}{n}$? (מספיק הסבר קצר).

ד. (5 נק') הראו על-ידי דוגמא שלא בהכרח מתקיים $\lim_{n \rightarrow \infty} nb_n = 0$.

שאלה 3

נתונות ארבע סדרות אינסופיות:

- א. $a_0 = 0$, עבור $k = \pm 1, \pm 2, \dots$ $a_k = 2^{-k}$
- ב. $b_0 = 0$, עבור $k = \pm 1, \pm 2, \dots$ $b_k = |k|^2$
- ג. $c_0 = 0$, עבור $k = \pm 1, \pm 2, \dots$ $c_k = |k|^{-2.5}$
- ד. $d_0 = 0$, עבור $k = \pm 1, \pm 2, \dots$ $d_k = |k|^{-0.5}$

עבור כל סדרה קבעו איזו טענה נכונה:

- (i) הסדרה היא סדרת מקדמי פורייה מרוכבים של פונקציה רציפה ומחזורית, בעלת נגזרת ראשונה רציפה ומחזורית, ונגזרת שנייה רציפה.
- (ii) לא מתקיים, והסדרה היא סדרת מקדמי פורייה מרוכבים של פונקציה רציפה ומחזורית, בעלת נגזרת ראשונה רציפה.
- (iii) (ii) לא מתקיים, והסדרה היא סדרת מקדמי פורייה מרוכבים של פונקציה רציפה למקוטעין.
- (iv) הסדרה איננה סדרת מקדמי פורייה של פונקציה רציפה למקוטעין.

שאלה 4

א. יהיו $a, b > 0$. חשבו את האינטגרל הבא (התשובה תהיה תלויה ב- a, b).

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{w^2}{(w^2 + a^2)(w^2 + b^2)} dw$$

ב. יהיו $a, b > 0$. הוכיחו:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{ab}{((x-y)^2 + a^2)(y^2 + b^2)} dy = \frac{a+b}{x^2 + (a+b)^2}$$

ג. חשבו את התמרת לפלס ההפוכה של הפונקציה $F(z) = \frac{z+1}{z^2+1}$.

בהצלחה!