אנליזת פורייה להנדסת חשמל (201-1-0041)

בוחן מס' 3, שנה"ל תשע"ב, סמסטר סתיו

המרצים: פרופ' ויקטור ויניקוב, ד"ר יוסי שטראוס, ד"ר אור שליט.

משך הבחינה: שעתיים.

חומר עזר: מחשבון פשוט ללא צג גרפי.

ענו על כל שלוש השאלות. משקל כל שאלה 33 נקודות. הקפידו להסביר כל צעד במהלך הפתרון, ולציין את המשפטים והטענות עליהם אתם מסתמכים.

בהצלחה!

1. נגדיר פונקציה על הישר

$$f(x) = \begin{cases} x & , \ x \in [-1,0] \\ 0, & \text{אחרת} \end{cases}$$

א. חשבו את התמרת פורייה $\hat{f}$ של f.

ב. האם הפונקציה $\hat{f}$ שייכת ל- L^1_{pc}? נמקו.

ג. חשבו את האינטגרל

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1-\cos t - t\sin t}{2\pi^2(1+t^2)t^2}\,dt.$$

2. נגדיר פונקציה בקטע $[-\pi,\pi]$

$$f(x)=\begin{cases}A(x-1) & , \quad x\in[0,\pi]\\ x+B & , \quad x\in[-\pi,0]\end{cases}$$

א. מצאו את הערכים של A,B עבורם הטור פורייה של f מתכנס במ"ש בקטע $[-\pi,\pi]$. נמקו!

ב. מצאו את הערכים של A,B עבורם הטור פורייה של f מתכנס במ"ש בקטע $[-{}^{1}/_{3},{}^{1}/_{2}]$. נמקו!

ג. מצאו את הערכים של A,B עבורם הטור פורייה של f מתכנס במ"ש בקטע $[{}^{1}/_{4},{}^{1}/_{2}]$. נמקו!

ד. מצאו את הערכים של A,B עבורם ממוצעי צזרו (של הסכומים החלקיים של הטור פורייה) של f מתכנסים **נקודתית** ל- f בכל הקטע $[-{}^{1}/_{3},{}^{1}/_{2}]$. נמקו!

3. יהי W המרחב של כל הפונקציות הרציפות למקוטעין ואינטגרביליות בהחלט על הישר, <u>המתאפסות מחוץ לקטע</u> $[0,1]$. נסמן

$$V=\{\hat{f}:f\in W\}$$

כלומר, V הוא המרחב של כל ההתמרות פורייה של פונקציות ב- W. כמו כן, נסמן

$$C_0(\mathbb{R})=\left\{f:\ \mathbb{R}\to\mathbb{C}\ \middle|\ \begin{matrix}\text{רציפה } f\\ \lim_{|w|\to\infty}f(w)=0\end{matrix}\right\}$$

א. הוכיחו ש V הוא תת-מרחב וקטורי של $C_0(\mathbb{R})$. (שימו לב: יש שני דברים להסביר. צריך לנמק מדוע קבוצה אחת מוכלת בשנייה, וצריך להוכיח שהקבוצה המוכלת היא תת-מרחב וקטורי).

ב. הוכיחו שאם $\{f_n\}$ סדרה ב- W, ושאם $f_n\to f$ בנורמת L^1 , אזי $\widehat{f_n}\to\hat{f}$ בנורמת אינסוף $\|\cdot\|_\infty$.

ג. הוכיחו שלכל $g\in V$ ולכל ε, קיימים $a_1,\cdots,a_k,b_1,\cdots,b_k\in[0,1]$ ו- $c_1,\cdots,c_k\in\mathbb{C}$ כך ש:

$$\left\|g-\sum_{j=1}^{k}c_j\,\frac{e^{-iwa_k}-e^{-iwb_k}}{w}\right\|_\infty<\varepsilon$$