אנליזה מתקדמת -- גליון תרגילים 1

(1) קבע אילו מהקבוצות הבאות מהוות תת-מרחב וקטורי של $\mathbb{R}^2$.
- $\{(a,b) : a<b\}$.
- $\{(a,b) : a\le b\}$.
- $\{(0,b) : b\in\mathbb{R}\}$.

(2) קבע אילו מהקבוצות הבאות מהוות תת-מרחב וקטורי של $\mathbb{R}^4$.
- $\{(x_1,x_2,x_3,x_4) : x_1+x_3=x_2+x_4\}$.
- $\{(x_1,x_2,x_3,x_4) : x_1+x_3\le x_2+x_4\}$.

(3) מצא אילו מהקבוצות הבאות מהווה תת-מרחב וקטורי של $\mathrm{C}[-2,2]$.
- $\{f\in \mathrm{C}[-2,2] : f(0)=0\}$.
- $\{f\in \mathrm{C}[-2,2] : f(0)=1\}$.
- קבוצת הפונקציות הרציפות למקוטעין $f\in \mathrm{C}[-2,2]$ כך שלכל $x\in\mathbb{C}$ מתקיים $|f(x)|<100$.

(4) מצא אילו מהביטויים הבאים מגדירים מכפלה פנימית על $\mathrm{C}[-2,2]$.
- $\langle f,g\rangle=\int_{-2}^{2}|f(t)+g(t)|\,dt$.
- $\langle f,g\rangle=\int_{-2}^{2}f(t)\overline{g(t)}dt+f(-\frac{1}{2})\overline{g(-\frac{1}{2})}$.
- $\langle f,g\rangle=3\int_{-2}^{2}f(t)\overline{g(t)}dt$.
- $\langle f,g\rangle=f(0)\overline{g(0)}+f(1)\overline{g(1)}$.

(5) הוכח שעבור מספרים ממשיים $x_1,...,x_n$ מתקיים: $|\frac{1}{n}\sum_i x_i|\le\sqrt{\frac{1}{n}\sum_i x_i^2}$.

(6) יהי V ממ"פ ויהיו $u,v\in V$. הוכח ש-$\|u+v\|=\|u\|+\|v\|$ אם ורק אם $u=\lambda v$ או $v=\lambda u$ כאשר λ סקלר ממשי חיובי.

(7) יהי $1\le p<+\infty$.

א. יהיו $a,b\ge 0$, $\alpha,\beta>0$. הוכח כי

$$(\alpha a+\beta b)^p\le(\alpha+\beta)^p\left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta}a^p+\frac{\beta}{\alpha+\beta}b^p\right).$$

רמז : הוכח תחילה כי $f(t)=t^p$ היא פונקציה קמורה בקטע $[0,+\infty)$.

תזכורת: פונקציה $f(t)$ נקראת קמורה בקטע מסוים אם לכל a, b בקטע ולכל $0\le\lambda\le 1$ מתקיים $f(\lambda a+(1-\lambda)b)\le\lambda f(a)+(1-\lambda)f(b)$, כלומר גרף הפונקציה נמצא מתחת לקטע הישר המחבר כל שתי נקודות על הגרף. בחדו"א 1, פונקציה קמורה מוגדרת לרוב בצורה שונה (גרף הפונקציה נמצא מעל למשיק לכל נקודה בקטע), אולם שתי ההגדרות הן שקולות (עבור פונקציה גזירה ברציפות), ובכל מקרה קמירות ניתנת לבדיקה ע"י בחינת הנגזרת השנייה (עבור פונקציה הגזירה פעמיים ברציפות).

ב. הוכח כי

$$\|x\|_p=\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p\right)^{1/p}$$

היא נורמה על $\mathbb{C}^n$.

רמז : על מנת להוכיח את אי שיוויון המשולש, הגדר $\alpha = \|x\|_p$, $\beta = \|y\|_p$, $a_i = |x_i|/\alpha$, $b_i = |y_i|/\beta$, והשתמש בסעיף הקודם.

(8) נגדיר עבור $p \geq 1$

$$\ell^p = \left\{ (x_i)_{i=1}^{\infty} : x_i \in \mathbb{C},\ \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p < +\infty \right\}.$$

הוכח כי ℓ^p הוא מרחב וקטורי נורמי עם נורמה

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p \right)^{1/p}.$$

(9) תהי V קבוצת הפונקציות הרציפות על קטע $[0, +\infty)$ המקיימות

$$\int_0^{+\infty} |f(x)|^2 e^{-x}\, dx < +\infty.$$

הוכח כי V, עם הפעולות הרגילות של חיבור פונקציות וכפל פונקציה בסקלר, הוא מרחב וקטורי, ו- V הוא מרחב מכפלה פנימית עם מכפלה פנימית

$$\langle f, g \rangle = \int_0^{+\infty} f(x)\overline{g(x)}\, e^{-x}\, dx.$$