<u>אנליזה מתקדמת -- גליון תרגילים 2</u>

תרגיל 1 --- $V=\mathbb{R}^3$ (המרחב האוקלידי התלת-מימדי) עם המכפלה הפנימית הסטנדרטית.

נגדיר $v_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, v_1=\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}$.

א. ע"י תהליך גרם-שמידט, מצא וקטורי יחידה u_1,u_2,w_1,w_2 כך ש-

$$\langle u_1,u_2\rangle=\langle w_1,w_2\rangle=0$$

וכן:

$$\begin{aligned}&V_1=\text{span}\,(v_1)=\text{span}\,(u_1)\,,\\&V_2=\text{span}\,(v_2)=\text{span}\,(w_1)\,,\\&V_3=\text{span}\,(u_1,u_2)=\text{span}\,(v_1,v_2)=\text{span}\,(w_1,w_2)\end{aligned}$$

ב. עבור $i=1,2,3$ נסמן ב-$\text{Pr}_i:V\to V_i$ את ההיטל האורתוגונלי. מצא נוסחא מפורשת לכל אחד מההיטלים האלה.

ג. מצא וקטור $w\in V$ כך ש-$\text{Pr}_1(w)\neq w, \text{Pr}_2(w)=w, \text{Pr}_3(w)=w$.

ד. מצא וקטור $w\in V$ כך ש-$\text{Pr}_1(w)\neq w, \text{Pr}_2(w)\neq w, \text{Pr}_3(w)\neq w$.

ה. האם קיים וקטור $w\in V$ כך ש-

$\text{Pr}_1(w)\neq w, \text{Pr}_2(w)=w, \text{Pr}_3(w)\neq w$?

ו. האם קיים וקטור $w\in V$ כך ש-

$\text{Pr}_1(w)=w, \text{Pr}_2(w)=w, \text{Pr}_3(w)=w$?

תרגיל 2 --- יהי $V=\mathbb{R}^3$ (המרחב התלת-מימדי) עם המכפלה הפנימית הסטנדרטית, יהי W תת-מרחב דו-מימדי, ויהי $P:V\to W$ ההיטל האורתוגונלי. נגדיר $||u||=\sqrt{\langle u,u\rangle}$. **נכון או לא נכון?** נמק.

- לכל $v\in V$, $P(P(v))=P(v)$.
- לכל $v\in V$, $P(v)=v$.
- אם $P(v)=v$ אז $v\in W$.
- לכל $v\in V$, $||P(v)||<||v||$.

תרגיל 3 --- בדף התרגילים הקודם הראית שהקבוצה V של פונקציות הרציפות על קטע $[0,+\infty)$ המקיימות

$$\int_0^{+\infty}|f(x)|^2e^{-x}\,dx<+\infty$$

עם הפעולות הרגילות של חיבור פונקציות וכפל פונקציה בסקלר, הוא מרחב וקטורי, ו- V הוא מרחב מכפלה פנימית עם מכפלה פנימית

$$\langle f,g\rangle=\int_0^{+\infty}f(x)\overline{g(x)}\,e^{-x}\,dx.$$

א. הוכח כי כל הפולינומים שייכים ל- V.

ב. מצא את ההיטל האורתוגונלי של x^4 על

- מרחב הפולינומים מדרגה 2 לכל היותר;
- מרחב הפולינומים מדרגה 3 לכל היותר.

תרגיל 4 --- יהי V מרחב וקטורי נורמי.
א. הוכח כי לכל $u, v \in V$ מתקיים $\|u - v\| \leq |\|u\| - \|v\||$.
ב. הוכח כי אם $u \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} u_n$ אזי $\|u\| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \|u_n\|$ ($\{u_n\}_{n=1}^{\infty} \subset V$, $u \in V$).

תרגיל 5 --- יהי V מרחב מכפלה פנימית. הוכח כי אם $u \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} u_n$, $v \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} v_n$ אזי $\langle u, v\rangle \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \langle u_n, v_n\rangle$.

תרגיל 6 --- נתבונן בסדרת הפונקציות $\left\{n\sqrt{|x|}e^{-n^2x^2/2}\right\}_{n=1}^{\infty}$.
א. בדוק את ההתכנסות הנקודתית של סדרת הפונקציות בקטע $[-1,1]$ (כלומר את ההתכנסות של סדרת הערכים של הפונקציות לכל $x \in [-1,1]$).
ב. בדוק את ההתכנסות במידה שווה של סדרת הפונקציות בקטע $[-1,1]$.
ג. בדוק את ההתכנסות של סדרת הפונקציות בנורמה $\|\cdot\|_2$ במרחב $C[-1,1]$.

תרגיל 7 --- א. הוכח כי לכל $f \in C[a,b]$ מתקיים $|\int_a^x f(t)\,dt| \leq \sqrt{x-a}\|f\|_2$.
רמז: היעזר באי שיוויון קושי-שוורץ.
ב. הוכח כי אם $f \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f_n$ בנורמה $\|\cdot\|_2$ ב- $C[a,b]$, אזי גם $f \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f_n$ בנורמה $\|\cdot\|_1$.
ג. האם ההיפך נכון? אם כן, הוכח; אם לא, תן דוגמא נגדית.

תרגיל 8 --- א. יהי V שוב המרחב הוקטורי של פונקציות רציפות בקטע $[0,+\infty)$ המקיימות

$$\int_0^{+\infty} |f(x)|^2 e^{-x}\,dx < +\infty$$

עם הנורמה המתאימה. הוכח כי אם סדרת פונקציות $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ ב- V מתכנסת במידה שווה בקטע $[0,+\infty)$ לפונקציה f, אזי $f \in V$ ו- $f \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f_n$ בנורמה.
ב. מצא סדרת פונקציות $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ ב- V המתכנסת בנורמה אך איננה מתכנסת במידה שווה בקטע $[0,+\infty)$.
ג. מצא סדרת פונקציות $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ ב- V המתכנסת באופן נקודתי (כלומר סדרת הערכים $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת לכל $x \in [0,+\infty)$) אך איננה מתכנסת בנורמה.

תרגיל 9 --- יהי V מרחב מכפלה פנימית, ותהי $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ מערכת אורתונורמלית אינסופית.
א. האם קיים $u \in V$ כך ש- $\langle u, e_n\rangle = 1/\sqrt{n}$?
ב. נניח כי $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ היא מערכת אורתונורמלית סגורה. יהיו $u, v \in V$ כך ש- $\langle u, e_n\rangle = 1/n$, $\langle v, e_n\rangle = 1/(n+1)$. חשב את $\langle u, v\rangle$.
ג. יהי $u \in V$ כך ש- $\langle u, e_n\rangle = 1/\sqrt{n(n+2)}$. מצא את הקירובים המיטביים u_1, u_2, u_3 ל- u בתוך $\text{span}\{e_1\}$, $\text{span}\{e_1, e_2\}$, $\text{span}\{e_1, e_2, e_3\}$ בהתאמה.
ד. נניח כי $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ היא מערכת אורתונורמלית סגורה. חשב את $\|u - u_1\|$, $\|u - u_2\|$, $\|u - u_3\|$, כאשר u_1, u_2, u_3 הם הקירובים המיטביים מהסעיף הקודם.

תרגיל 10 --- בקטע $[0,1]$, נגדיר פונקציות רדמכר (Rademacher) $r_n(x)$ עבור $n \geq 0$ ע"י $r_0(x) = 1$ ו-

$$r_n(x) = (-1)^{j+1} \text{ אם } \frac{j-1}{2^n} \leq x < \frac{j}{2^n}, j = 1, \dots, 2^n$$

נגדיר פונקציות וולש (Walsh) $w_n(x)$ באופן הבא: אם

$$n = \epsilon_l \cdot 2^l + \epsilon_{l-1} \cdot 2^{l-1} + \cdots + \epsilon_2 \cdot 4 + \epsilon_1 \cdot 2 + \epsilon_0$$

הוא פיתוח של n לפי בסיס 2 (כך שכל ϵ_i הוא או 0 או 1), אזי

$$w_n(x) = r_{l+1}(x)^{\epsilon_l} \cdots r_1(x)^{\epsilon_0};$$

א. בנה את הגרף של הפונקציות $w_0(x), \dots, w_7(x)$.
ב. הוכח כי פונקציות וולש מהוות מערכת אורתונורמלית ב- $L^2[0,1]$.
ג. הוכח כי זוהי מערכת אורתונורמלית סגורה.

תרגיל 11 --- יהי V ממ"פ. הוכח או הפרך:
א. אם $\{e_n\}$ אוסף אורתונורמלי אינסופי ב-V אזי לכל $u \in V$ מתקיים $\langle u, e_n \rangle \xrightarrow{n \to \infty} 0$.
ב. אם $\{e_n\}$ אוסף אורתונורמלי אינסופי ב-V אזי לכל $u \in V$ מתקיים $|\langle u, e_n \rangle|^2 \xrightarrow{n \to \infty} 0$.
ג. אם $W = span\{e_1, \dots, e_n\}$ כאשר $\{e_1, \dots, e_n\}$ אוסף אורתוגונלי, $u \in V$ ו- $\tilde{u} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\langle u, e_i \rangle}{\|e_i\|} e_i$. אז לכל $w \in W$ מתקיים $\|u - \tilde{u}\| \leq \|u - w\|$.
ד. אם $W = span\{e_1, \dots, e_n\}$ כאשר $\{e_1, \dots, e_n\}$ אוסף אורתונורמלי, $u \in V$ ו-$\tilde{u} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\langle u, e_i \rangle}{\|e_i\|^3} e_i$. אז לכל $w \in W$ מתקיים $\|u - \tilde{u}\| \leq \|u - w\|$.
ה. אם $W = span\{e_1, \dots, e_n\}$ כאשר $\{e_1, \dots, e_n\}$ אוסף אורתונורמלי, $u \in V$ ו- $\tilde{u} = \sum_{i=1}^{n} \langle u, e_i \rangle e_i$. אז לכל $w \in W$ חוץ מ- $w = \tilde{u}$ מתקיים $\|u - \tilde{u}\| < \|u - w\|$.
ו. אם $W = span\{e_1, \dots, e_n\}$ כאשר $\{e_1, \dots, e_n\}$ אוסף וקטורים כלשהו, $u \in V$ ו-$\tilde{u} \in W$ וקטור המקיים, לכל $w \in W$, $\|u - \tilde{u}\| \leq \|u - w\|$. אז לכל $w \in W$, $\langle u - \tilde{u}, w \rangle = 0$.
ז. אם $W = span\{e_1, \dots, e_n\}$ כאשר $\{e_1, \dots, e_n\}$ אוסף אורתונורמלי, $u \in V$ ו-$\tilde{u} \in W$ וקטור המקיים, לכל $w \in W$, $\|u - \tilde{u}\| \leq \|u - w\|$. אז$\tilde{u} = \sum_{i=1}^{n} \langle u, e_i \rangle e_i$
.