3 אנליזה מתקדמת -- גליון תרגילים

תרגיל 1 --- תהא $f\ :\ R\to C$ רציפה למקוטעין ובעלת מחזור 2π, ויהיו $\sigma_n(f;x)$ ממוצעי צ'זרו של טור פורייה של f. הוכח כי לכל x מתקיים

$$\lim_{n\to\infty}\sigma_n(f;x)=\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}$$

כאשר $f(x-0),f(x+0)$ הם הגבולות החד-צדדיים של f בנקודה x מימין ומשמאל, בהתאמה.

תרגיל 2 --- יהיו $f,g\ :\ R\to C$ רציפות למקוטעין, בעלות מחזור 2π, ונניח שטורי הפורייה שלהן הם

$$f(x)\sim\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_ne^{inx},g(x)\sim\sum_{n=-\infty}^{\infty}b_ne^{inx}$$

מצא את טור פורייה מרוכב של הפונקציה $h(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x-t)g(t)dt$.

תרגיל 3 --- א. הוכח כי לכל $0<r<1$,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}r^{|n|}e^{inx}=\frac{1-r^2}{1-2r\cos x+r^2}.$$

ב. נסמן $P_r(x)=\frac{1-r^2}{1-2r\cos x+r^2}$ ($P_r(x)$ נקרא גרעין פואסון (Poisson)) תהי $f(x)$ פונקציה רציפה למקוטעין על $[-\pi,\pi]$ עם טור פוריה $\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_ne^{inx}$. הוכח כי

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x-t)P_r(t)\,dt=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_nr^{|n|}e^{inx}$$

כאשר הטור מתכנס בהחלט ובמידה שווה לפי x.

(רמז: היעזר בסעיף הקודם. על מנת להוכיח התכנסות במידה שווה, השתמש במבחן ויירשטרס.)

ג. הוכח את התכונות הבאות של גרעין פואסון:

לכל x מתקיים $P_r(x)\geq 0$

מתקיים $P_r(x)\underset{r\to 1-}{\longrightarrow}0$ במידה שווה לפי x על $[-\pi,-\delta]\cup[\delta,\pi]$ לכל $\delta>0$.

מתקיים $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}P_r(x)\,dx=1$.

ד. תהי $f(x)$ פונקציה רציפה על $[-\pi,\pi]$ עם $f(-\pi)=f(\pi)$ ועם טור פוריה $\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_ne^{inx}$. הוכח כי

$$\lim_{r\to 1-}\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_nr^{|n|}e^{inx}=f(x)$$

במידה שווה לפי x.

הערה: בעיה זו מציגה דרך חילופית, לעומת משפט פייר, "להתמודד" עם העובדה כי טור פורייה של פונקציה רציפה איננו תמיד מתכנס. במשפט פייר, אנו משפרים את ההתכנסות ע"י מעבר מסכומים חלקיים של טור פורייה לממוצעים חשבוניים; כאן אנו משפרים את ההתכנסות ע"י הכפלת איברי טור פורייה ב- $r^{|n|}$.

תרגיל 4 --- השתמש בטור פורייה של הפונקציה $f(x)=\cos ax$ בקטע $[-\pi,\pi]$, כאשר a איננו מספר שלם, על מנת להוכיח כי

$$\frac{1}{\sin a\pi}=\frac{1}{a\pi}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{a\pi+n\pi}+\frac{1}{a\pi-n\pi}\right),$$
$$\cot a\pi=\frac{1}{a\pi}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{a\pi+n\pi}+\frac{1}{a\pi-n\pi}\right).$$

תרגיל 5 --- מצא טור פורייה של הפונקציה

$$f(x)=\begin{cases}2+\dfrac{x}{2\pi}, & -\pi\le x<0\\ 2, & 0\le x\le\pi\end{cases}.$$

בנה את הגרף של הסכום של טור פורייה בקטע $[-3\pi,3\pi]$.

תרגיל 6 --- מצא טור פורייה בקטע $[-l,l]$ של הפונקציה

$$f(x)=\begin{cases}0, & -l\le x\le -b\\ 1, & -b<x<b,\\ 0, & b\le x\le l\end{cases}.$$

באילו תתי קטעים סגורים $[\alpha,\beta]\subseteq[-l,l]$ הטור מתכנס במידה שווה?

תרגיל 7 --- תהי $f(x)$ גזירה ברציפות $k-1$ פעמים בקטע $[-\pi,\pi]$ עם $f^{(j)}(-\pi)=f^{(j)}(\pi)$, $j=0,\ldots,k-1$ וגזירה ברציפות למקוטעין k פעמים. יהיו c_n מקדמי פורייה של $f(x)$, הוכח כי $\lim\limits_{n\to\infty}n^k c_n=0$.

תרגיל 8 --- מצא טור פורייה של כל אחת מהפונקציות הבאות:

$f(x)=9\cos(x)+7\sin(2x)+11\cos(3x)$, $x\in[-\pi,\pi]$.

$$f(x)=\begin{cases}\sin(x) & 0<x\le\pi\\ \cos(x) & -\pi\le x\le 0\end{cases}$$

$f(x)=|x^3|$, $x\in[-\pi,\pi]$

תרגיל 9 --- מצא טור פורייה מרוכב של הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=\sin\frac{x}{2}$, $x\in[-\pi,\pi]$

ב. $f(x)=\pi-x^2$, $x\in[-\pi,\pi]$

ג. $$f(x)=\begin{cases}e^{ix} & 0<x<\pi\\ e^{-ix} & -\pi\le x\le 0\end{cases}$$

תרגיל 10 --- א. מצא את טור פורייה של $f(x)=\sin\left(\frac{px}{2}\right)$, $p\ne 0$, $x\in[-\pi,\pi]$.

ב. באמצעות שויון פרסבל, הוכח $\frac{\pi^2}{64}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{(1-4n^2)^2}$.

תרגיל 11 --- א. פתח לטור פוריה את הפונקציה $(h \neq 0)$

$$f(x) = \begin{cases} h^2, h \le x \le \pi \\ 0 \quad , -\pi \le x \le h \end{cases}$$

ב. רשום את שויון פרסבל עבור הטור הנ"ל וחשב את $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-(-1)^n \cos(2n))}{n^2}$.