

**אנליזה מתקדמת -- גליון תרגילים 5**

1. חשב את התמרת פורייה של הפונקציות הבאות

$$f(x) = \begin{cases} 3xe^{-x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases} \quad (1)$$

$$.a, b > 0, f(x) = \frac{\cos(bx)}{a^2 + x^2} \quad (2)$$

$$f(x) = 8x^3 e^{-\frac{4(x+1)^2+5}{3}} \quad (3)$$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \cos(3x) & |x| \leq a \\ 0 & |x| > a \end{cases} \quad (4)$$

$$.a > 0, f(x) = \frac{x}{(a^2 + x^2)^2} \quad (5)$$

2. א. חשב את התמרת פורייה של הפונקציה

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & |x| \leq 1 \\ 0 & |x| > 1 \end{cases}$$

ב. חשב את האינטגרלים

$$\int_0^\infty \frac{\sin x - x \cos x}{x^3} \cos x dx, \quad \int_0^\infty \frac{\sin x - x \cos x}{x^3} \cos \frac{x}{2} dx$$

רמז: השתמש בהתמרת פורייה ההפוכה של סעיף א'.

ג. השתמש בנוסחת פלנשראל כדי לחשב את  $\int_0^\infty \left( \frac{\sin x - x \cos x}{x^3} \right)^2 dx$

3. תהי  $y(x)$  גזירה ברציפות וגזירה פעמיים ברציפות למקוטעין, וכך ש-  $y, y', y''$  אינטגרביליות בהחלט על  $(-\infty, +\infty)$ . נניח כי  $y$  מקיימת את המשוואה הדיפרנציאלית

$$.y'' + 2xy' + 2y = 0$$

איזה משוואה דיפרנציאלית מקיימת  $\mathcal{F}(y)$ ?

4. על ידי שמוש בהתמרת פורייה פתור את המשוואות האינטגרליות הבאות:

א.  $\int_{-\infty}^\infty f(t)f(x-t)dt = e^{-\frac{3(x+1)^2}{2}}$

ב. כאשר  $0 < b < a$   $\int_{-\infty}^\infty \frac{f(t)}{(x-t)^2 + b^2} dt = \frac{x}{(a^2 + x^2)^2}$

5. תהיינה

$$f(x) = \frac{x}{(a^2 + x^2)^2}, \quad g(x) = \begin{cases} 1 & |x| \leq a \\ 0 & |x| > a \end{cases}$$

חשב את  $f * g$  בשתי דרכים:

א. על פי ההגדרה

ב. על ידי שמוש בהתמרת פורייה.

6. השתמש במשפט פלנשראל כדי לחשב את האינטגרל

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 dx}{(a^2 + x^2)(b^2 + x^2)}$$

7. א. הראה שאוסף הפונקציות המופיעות במשפט הדגימה

$$\left\{ \sqrt{\frac{L}{\pi}} \frac{\sin(Lx - n\pi)}{Lx - n\pi} \right\}_{n=-\infty}^{\infty}$$

של שאנון הן מערכת אורתונורמלית ב-  $L^2_{pc}(-\infty, \infty)$ .  
 ב. מצא את הפיתוח ביחס למערכת מסעיף א' כאשר  $L = \pi$  של הפונקציה

$$f(x) = \int_{-\pi}^{\pi} \lambda e^{i\lambda x} d\lambda$$

8. מצא את התמרת לפלס הפוכה של הפונקציות הבאות

$$\frac{1}{(s-3)(s+2)^2} \quad (1)$$

$$\frac{s}{(s+1)^3(s-1)^2} \quad (2)$$

$$\frac{s^2}{(s^2+4)^2} \quad (3)$$

9. מצא פתרון למשוואות הדיפרנציאליות הבאות עם תנאי ההתחלה הנתונים:

$$y'(0) = -2, y(0) = 3, y'' + 3y' - 4y = 0 \quad (1)$$

$$y'(0) = 1, y(0) = 0, y''(t) + 2y'(t) + 5y(t) = e^{-t} \sin(t) \quad (2)$$