אנליזה מתקדמת -- גליון תרגילים 6

תרגיל 1 --- יהא $u(x,t)$ פתרון של משוואה דיפרנציאלית חלקית (משוואת החום):

$$\begin{cases} u_t - k_{xx} = 0 & (-\infty < x < \infty, 0 < t < \infty) \\ u(x,0) = f(x) & (-\infty < x < \infty) \end{cases}$$

א. יהא

$$U(w,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} u(x,t)e^{-iwx}dx$$

הוכח כי $U_t + kw^2U = 0$.

ב. הוכח כי $U(w,t) = F(w)e^{-kw^2t}$ כאשר $F(w) = \hat{f}(w)$.

ג. מצא טרנספורם פורייה הפכי של e^{-kw^2t}.

ד. הוכח כי

$$u(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi kt}}\int_{-\infty}^{\infty} f(y)e^{-\frac{(x-y)^2}{4kt^2}}dy$$

(רמז: היעזר בסעיפים 5.2,5.3 ומשפט הקונבולוציה).

תרגיל 2 --- תהא $f \in L^1(-\infty,\infty) \cap L^2(-\infty,\infty)$ כך ש- $\hat{f}(w) = 0$ לכל $L \le |w|$.

א. מצא את הפיתוח של $F(w) = \hat{f}(w)$ לטור פורייה בקטע $[-L,L]$.

ב. הוכח כי

$$F(w) = \frac{1}{2L}\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(\frac{n\pi}{L})e^{-\frac{in\pi w}{L}}G_L(w)$$

כאשר הטור מתכנס ב- $L^2_{\text{pc}}(-\infty,\infty)$ ו-

$$G_l(w) = \begin{cases} 1 & |w| \le L \\ 0 & |w| > L \end{cases}$$

ג. מצא טרנספורם פורייה הפכי של הפונקציה $e^{-\frac{in\pi w}{L}}G_L(w)$.

ד. הוכח כי

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(\frac{n\pi}{L})\frac{\sin(Lx-n\pi)}{Lx-n\pi}$$

תרגיל 3 --- א. תהא $f(t)$ פונקציה רציפה למקוטעין על $[0,\infty)$ שהינה מחזורית עם מחזור $0 < T$. הוכח כי עבור $\operatorname{Re}\sigma > 0$

$$\mathcal{L}(f)(\sigma) = \frac{1}{1-e^{-T\sigma}}\int_0^T e^{-\sigma t}f(t)dt$$

ב. חשב את התמרת לפלס של הפונקציה

$$f(t) = \begin{cases} 1 & 4m \le t \le 4m+2 \\ -1 & 4m+2 < t < 4(m+1) \end{cases}$$

$(m = 0,1,2,\ldots)$

תרגיל 4 --- א. תהא $f(t)$ פונקציה המוגדרת על $[0,\infty)$ כך ש- $\frac{f(t)}{t}$ רציפה למקוטעין בתחום זה וקיימים קבועים $0<a,K$ כך שמתקיים $|f(t)|\le Kte^{at}$ לכל $0\le t$. הוכח כי $\mathcal{L}(f)(\sigma)$ ו- $\mathcal{L}(\frac{f}{t})(\sigma)$ קיימים לכל $\operatorname{Re}\sigma>a$ ומתקיים

$$\mathcal{L}(\frac{f}{t})(\sigma)=\int_\sigma^\infty \mathcal{L}(f)(\tau)d\tau=\int_s^\infty \mathcal{L}(f)(u+i\omega)du$$

($\sigma=s+i\omega$ והאינטגרל הראשון נלקח על קרן אופקית מהנקודה σ ל- ∞ במישור המרוכב).

ב. חשב התמרות לפלס של הפונקציות $\frac{\sin t}{t}$, $\frac{1-e^{-t}}{t}$

תרגיל 5 --- פתור בעיות עם תנאי התחלה

א.

$$\begin{cases} y''+y=\begin{cases} t & 0\le t<1 \\ 1 & 1\le t\end{cases} \\ y(0)=0, y'(0)=0 \end{cases}$$

ב.

$$\begin{cases} y''2y'+3y=8(t-\pi)+\sin t \\ y(0)=0, y'(0)=1 \end{cases}$$

ג.

$$\begin{cases} y''+y=8(t-\pi)\cos t \\ y(0)=0, y'(0)=1 \end{cases}$$

ד.

$$\begin{cases} y'''-y''+4y'-4y=2009e^x\sin 2x \\ y(0)=1, y'(0)=-19, y''(0)=-37 \end{cases}$$

ה.

$$\begin{cases} y''+9y=\begin{cases} 0 & 0\le t\le c \\ t-c & c<t\end{cases} \\ y(0)=a, y'(0)=b \end{cases}$$

תרגיל 6 --- תהא

$$\Delta_a(t)=\sum_{n=1}^\infty \delta(t-na) \quad a>0$$

א. הוכח כי $\Delta_a(t)=\lim_{m\to\infty}G_{m,a}(t)$ כאשר

$$G_{m,a}(t)=\begin{cases} (t-na+\frac{a}{m})m^2 & t\in[na-\frac{1}{m},na] \\ (t-na-\frac{a}{m})m^2 & t\in[na,na+\frac{1}{m}] \\ 0 & \text{אחרת}\end{cases}$$

צייר את גרף הפונקציה $G_{m,a}(t)$.

ב. הוכח כי $\Delta_a(t) = F'_a(t)$ כאשר $F_a(t) = \left\lfloor \frac{t}{a} \right\rfloor$. צייר את גרף הפונצקיה $F_a(t)$.

ג. הראה כי

$$\mathcal{L}(\Delta_a)(\sigma) = \frac{e^{-a\sigma}}{1 - e^{-a\sigma}}$$

תרגיל 7 --- חשב את התמרת לפלס ההפוכה של הפונקציות הבאות:

א. $\frac{1}{(1+s^2)^2}$

ב. $\frac{1}{s^3(1+s^2)}$

ג. $\frac{1}{s\sqrt{1+s}}$

ד. $\frac{1}{s(e^s+1)}$

תרגיל 8 --- תהא $u(x)$ פונקציה גזירה אינסוף פעמים על $\mathbb{R}$. חשב

$$\lim_{n\to\infty} n^2 \left(\int_{-1/n}^{0} u(x-s)\,ds - \int_{0}^{1/n} u(x-s)\,ds \right)$$

תרגיל 9 --- יהא $\mathcal{S}$ המרחב הוקטורי של פונקציות $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ גזירות אינסוף פעמים כך שלכל $0 \le m, k$ מתקיים $\lim_{x\to\pm\infty} x^m f^{(k)}(x) = 0$.

א. הוכח כי אם $f \in \mathcal{S}$ אזי גם $\hat{f} \in \mathcal{S}$.

ב. הוכח כי התמרת פוריה מעתיקה את $\mathcal{S}$ על עצמו (כלומר לכל $f \in \mathcal{S}$ קיים $g \in \mathcal{S}$ כך ש-$f(w) = \hat{g}(w)$).

תרגיל 10 --- א. נניח כי $f, \hat{f} \in L^1_{\text{pc}}(-\infty, +\infty)$. הוכח כי סדרת הפונקציות $f_N(x) = \int_{-N}^{N} e^{i\omega x} \hat{f}(\omega)\,d\omega$ מתכנסת במידה שווה ל-$f(x)$.

ב. תהא $g \in L^1_{\text{pc}}(-\infty, +\infty)$, ותהא $\{f_n\}$ סדרת פונקציות רציפות המתכנסת במידה שווה לפונקציה רציפה וחסומה f. הוכח כי

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_n(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f(x)\,dx$$

ג. תהא $g \in L^1_{\text{pc}}(-\infty, +\infty)$. הוכח כי סדרת הפונקציות $\int_{-N}^{N} e^{i\omega x} \hat{g}(\omega)\,d\omega$ מתכנסת לפונקציה g במובן של דיסטריביוציות.

תרגיל 11 --- א. תהא f פונקציה רציפה למקוטעין על $\mathbb{R}$ כך ש-

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x^{-m} f(x)|\,dx < \infty$$

עבור $0 < m$ שלם כלשהו. הוכח כי סדרת הפונקציות $\hat{f}_N(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-N}^{N} e^{-i\omega x} f(x)\,dx$ מתכנסת (במובן של דיסטריביוציות) לדיסטריביוציה $\hat{f}$ המוגדרת

$$\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) u(\omega)\,d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \hat{u}(x)\,dx$$

$\hat{f}$ מכונה התמרת פורייה של f במובן של דיסטריביוציות; היא מתלכדת עם המובן המוכר של התמרת פורייה עבור $f \in L^1_{\text{pc}}(-\infty,+\infty)$, ועם התמרת פורייה ב- L^2 אם $f \in L^2_{\text{pc}}(-\infty,+\infty)$.

ב. הוכח כי התמרת פורייה (במובן של דיסטריביוציות) של $e^{i\eta x}$ שווה $\delta(\omega-\eta)$, וחשב

$$\lim_{N\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin(N\omega)}{\omega}u(\omega)$$

עבור $u \in \mathcal{D}$.

תרגיל 12 --- א. תהא $\{f_n\}$ סדרת פונקציות רציפות למקוטעין על $\mathbb{R}$. נניח כי $f_n(x)$ מתכנסת נקודתית לפונקציה הרציפה למקוטעין $f(x)$, וכי קיימת פונקציה רציפה למקוטעין $g(x)$ כך ש- $|f_n(x)| \le g(x)$ לכל x וגם

$$\int_{-\infty}^{\infty}|x^{-m}g(x)|\,dx<\infty$$

עבור $m>0$ שלם כלשהו. הוכח כי סדרת הדיסטריביוציות $\widehat{f_n}$ מתכנסת לדיסטריביוציה $\hat{f}$.

ב. הוכח כי הפונקציות $\frac{x}{x^2+\epsilon^2}$ מתכנסות במובן של דיסטריביוציות כאשר $\epsilon\to 0$ לדיסטריביוציה $\text{p.v.}\frac{1}{x}$ המוגדרת ע"י

$$\int_{-\infty}^{\infty}\text{p.v.}\frac{1}{x}\,u(x)\,dx=\lim_{\delta\to 0+}\left(\int_{-\infty}^{-\delta}+\int_{\delta}^{\infty}\right)\frac{1}{x}\,u(x)\,dx$$

רמז: הגבול בצד ימין שווה לאינטגרל (המתכנס בהחלט) $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{x}\left(u(x)-u(0)\right)dx$.

ג. הוכח כי התמרת פורייה (במובן של דיסטריביוציות) של $\operatorname{sign}x$ שווה $\frac{1}{\pi i}\text{p.v.}\frac{1}{x}$ (רמז: חשב את התמרת פורייה של $\operatorname{sign}x\; e^{-\epsilon|x|}$ והשתמש בסעיפים א' וב'), וחשב

$$\lim_{N\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{2-2i\sin N\omega}{i\omega}u(\omega)$$

עבור $u \in \mathcal{D}$.

תרגיל 13 --- תהא ϕ דיסטריביוציה בעלת תומך קומפקטי. נגדיר את הפונקציה

$$\hat{\phi}(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\phi(x)e^{-i\omega x}\,dx$$

הוכח כי סדרת הפונקציות $\int_{-N}^{N}e^{i\omega x}\hat{\phi}(\omega)\,d\omega$ מתכנסת (במובן של דיסטריביוציות) ל- $\phi(x)$.

תרגיל 14 --- נגדיר את הפונקציות

$$g_N(t)=\int_{-N}^{N}\frac{e^{ix(t+1)}-e^{ix(t-1)}}{x}dx$$

הוכח כי הסדרה $(g_N)_{N\in\mathbb{N}}$ מתכנסת במובן של דיסטריביוציות וחשב את גבולה ב- $\mathcal{D}'$.

תרגיל 15 --- לכל $\alpha\in\mathbb{R}$, חשב את $\lim_{n\to\infty}f_n^{(\alpha)}$ במובן של דיסטריביוציות, כאשר

$$f_n^{(\alpha)}=\begin{cases} n^{\alpha} & |x|\le\frac{1}{n}\\ 0 & \text{אחרת}\end{cases}$$