אוניברסיטת בן-גוריון בנגב
מדור בחינות

מס׳ נבחן ____________

תאריך בחינה: **31.1.10**
שם המורים: **ו. ויניקוב, ב. וייס, י. שטראוס**
מבחן ב: **אנליזה מתקדמת לחשמל**
מס׳ הקורס: **201-1-0041**
משך הבחינה: **3 שעות**
שנה: **ב׳** סמ׳: **א׳** מועד: **א׳**
חומר עזר: **מחשבון פשוט ללא צג גרפי**

להלן תקציר הפתרונות. יש לשים לב שבפתרון בחינה יש להסביר ביתר פירוט מעברים מסוימים ולהראות יותר חישובים.

1. תהי $f \in L^2_{PC}(R) \cap L^1_{PC}(R)$ רציפה, ונניח שקיים $L>0$ כך ש- $\hat{f}(\omega)=0$ עבור $|\omega| \ge L$, כאשר $\hat{f}$ התמרת פורייה של f.

א. (2 נק׳) הוכח כי $\hat{f}(\omega) \sim \frac{1}{2L}\sum_{n=-\infty}^{\infty} f\left(-\frac{n\pi}{L}\right)e^{\frac{in\pi\omega}{L}}$ (טור פורייה מרוכב של $\hat{f}$ בקטע $[-L,L]$).

לפי נוסחא של טור פורייה מרוכב בקטע $[-L,L]$: $c_n=\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L}\hat{f}(x)e^{-in\pi x/L}dx$. לפי תנאי החסימות בתדר ולפי נוסחת ההתמרה ההפוכה:

$$c_n=\frac{1}{2L}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(x)e^{-in\pi x/L}dx=\frac{1}{2L}f\left(\frac{-n\pi}{L}\right)$$

ב. (2 נק׳) הוכח כי $\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^2dx=\frac{\pi}{L}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|f\left(\frac{n\pi}{L}\right)\right|^2$.

לפי נוסחת פרסבל ונוסחת פלנשרל:

$$\frac{\pi}{L}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|f\left(\frac{n\pi}{L}\right)\right|^2=\frac{\pi}{L}\sum_{n=-\infty}^{\infty}4L^2|c_n|^2=4\pi L\int_{-L}^{L}\left|\hat{f}(x)\right|^2dx=\frac{4\pi L}{2L}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\hat{f}(x)\right|^2dx=\frac{2\pi}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^2dx$$

ג. (3 נק׳) הוכח כי $\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\frac{\sin(Lx-n\pi)}{Lx-n\pi}dx=\frac{\pi}{L}f\left(\frac{n\pi}{L}\right)$.

לפי משפט ההתמרה ההפוכה, $f(x)=2\pi\Im\left[\hat{f}(-\omega)\right]$. כמו כן ידוע כי $\frac{\sin Lx}{\pi x}=\Im\left[1_L(\omega)\right]$ כאשר $1_L(\omega)=\begin{cases}1 & |\omega|<L\\ 0 & |\omega|\ge L\end{cases}$, ומנוסחת הסיבוב, $\frac{\sin Lx-n\pi}{Lx-n\pi}=\Im\left[\frac{\pi}{L}e^{in\pi\omega/L}1_L(\omega)\right]$. לפי נוסחת פלנשרל המוכללת

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\frac{\sin Lx-n\pi}{Lx-n\pi}dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}2\pi\hat{f}(-\omega)\frac{\pi}{L}e^{-in\pi\omega/L}1_L(\omega)d\omega=\frac{\pi}{L}\int_{-L}^{L}\hat{f}(\omega)e^{in\pi\omega/L}d\omega=2\pi c_{-n}$$

עתה משתמשים בסעיף א׳.

ד. (2 נק׳) נסמן $e_n=\sqrt{\frac{L}{\pi}}\frac{\sin(Lx-n\pi)}{Lx-n\pi}$. הוכח כי $\{e_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ היא מערכת אורתונורמלית ב- $L^2_{PC}(R)$, והטור $\sum_{n=-\infty}^{\infty}\langle f,e_n\rangle e_n$ מתכנס ל- f ב- $L^2_{PC}(R)$.

לפי נוסחת פלנשרל, ולפי סעיף ג׳, לכל m,n מתקיים

$$\langle e_n,e_m\rangle=\frac{L}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin Lx-n\pi}{Lx-n\pi}\frac{\sin Lx-m\pi}{Lx-m\pi}dx=\frac{L}{\pi}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\pi}{L}1_L(\omega)e^{in\pi\omega/L}\overline{\frac{\pi}{L}1_L(\omega)e^{im\pi\omega/L}}d\omega=\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L}e^{i\pi\omega(n-m)/L}d\omega$$

והאורתונורמליות נובעת מהאורתונורמליות של בסיס פורייה מרוכב בקטע $[-L,L]$. בסעיפים ב' וג' הוכחנו את השוויון $\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^2dx=\frac{\pi}{L}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|f\left(\frac{-n\pi}{L}\right)\right|^2=\sum_{n=-\infty}^{\infty}|\langle f,e_n\rangle|^2$ שהוא שוויון פרסבל עבור הביטוי $\{e_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$, ומכיון ששוויון פרסבל שקול להתכנסות בנורמה, זה מוכיח את המבוקש.

2. יהי $0<r<1$ ונסמן $P_r(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}r^{|n|}e^{inx}$.

א. (3 נק') הוכח כי טור זה מתכנס במ"ש בקטע $[-\pi,\pi]$ ומתקיים

$$P_r(x)=\frac{1-r^2}{1-2r\cos x+r^2}.$$

ההתכנסות במ"ש היא לפי קריטריון M של ויירשטראס: $\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|r^{|n|}e^{inx}\right|\le 2\sum_{n=0}^{\infty}r^n=\frac{2}{1-r}<\infty$. לפי הנוסחא לסכום טור גיאומטרי:

$$P_r(x)=1+\sum_{n=1}^{\infty}r^n(e^{inx}+e^{-inx})=1+\sum_{n=1}^{\infty}r^ne^{inx}+\sum_{n=1}^{\infty}r^ne^{-inx}=1+\frac{re^{ix}}{1-re^{ix}}+\frac{re^{-ix}}{1-re^{-ix}}=\frac{1-r^2}{1-2r\cos x+r^2}$$

בגלל שההתכנסות היא במ"ש הביטוי $\sum_{n=-\infty}^{\infty}r^{|n|}e^{inx}$ הוא טור פורייה מרוכב של $P_r(x)$, כלומר $c_n=r^{|n|}$.

ב. (3 נק') ע"י גזירה מתחת לסימן האינטגרל הוכח כי $\int_{-\pi}^{\pi}\ln\left(1-2r\cos x+r^2\right)dx=0$.

נסמן את האינטגרל ב-$h(r)$. אז ע"י גזירה מתחת לסימן האינטגרל:

$$h'(r)=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{d}{dr}\ln\left(1-2r\cos x+r^2\right)dx=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{-2\cos x+2r}{1-2r\cos x+r^2}dx=\frac{1}{1-r^2}\int_{-\pi}^{\pi}P_r(x)(-2\cos x+2r)dx=$$

$$\frac{1}{1-r^2}\left[-\int_{-\pi}^{\pi}P_r(x)e^{-ix}dx-\int_{-\pi}^{\pi}P_r(x)e^{ix}dx+2r\int_{-\pi}^{\pi}P_r(x)dx\right]=\frac{2\pi}{1-r^2}(-2r+2r)=0$$

(במעבר האחרון השתמשנו בכך שאנו יודעים את טור פורייה מרוכב של $P_r(x)$ מסעיף א', ושלושת הביטויים שהתקבלו הם מקדמים). לכן h קבועה ובפרט $h(r)=h(0)=0$.

ג. (3 נק') הראה שטור פורייה של הפונקציה $\ln\left(1-2r\cos x+r^2\right)$ הוא

$$-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r^n}{n}\cos nx.$$

בחישוב טור פורייה ממשי, מאחר שהפונקציה זוגית מתקיים $b_n=0$. עבור $n>0$ נשתמש באינטגרציה לפי חלקים:

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\ln\left(1-2r\cos x+r^2\right)\cos nx\,dx=\frac{1}{n\pi}\ln\left(1-2r\cos x+r^2\right)\sin nx\Big|_{-\pi}^{\pi}-\frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{2r\sin x\sin nx}{1-2r\cos x+r^2}dx$$

$$=\frac{r}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos(n+1)x-\cos(n-1)x}{1-2r\cos x+r^2}dx=\frac{2r}{n\left(1-r^2\right)}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}P_r(x)\left[e^{-i(n+1)x}-e^{-i(n-1)x}\right]dx=\frac{2r\left(r^{n+1}-r^{n-1}\right)}{n\left(1-r^2\right)}=\frac{-2r^n}{n}$$

כמו כן $a_0=0$ לפי סעיף ב', ולכן קבלנו את המקדמים של הטור המבוקש.

3. א. (5 נק') מצא את טורי פורייה של הפונקציות $x\sin x$ ו- $x\cos x$ בקטע $[-\pi,\pi]$.

נפתור את שני הסעיפים עבור $x\cos x$, המקרה השני דומה. $x\cos x$ פונקציה איזוגית ולכן $a_n=0$ לכל $n\ge 0$. כמו כן, עבור $n\ge 2$ (לפי נוסחא טריגונומטרית ואינטגרציה לפי חלקים)

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x\cos x\sin nxdx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x\sin(n+1)xdx+\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x\sin(n-1)xdx=$$

$$\left.\frac{-x\cos(n+1)x}{2\pi(n+1)}\right|_{-\pi}^{\pi}+\frac{1}{2\pi(n+1)}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(n+1)xdx+\left.\frac{-x\cos(n-1)x}{2\pi(n-1)}\right|_{-\pi}^{\pi}+\frac{1}{2\pi(n-1)}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(n-1)xdx=$$

$$\frac{\pi(-1)^n}{2\pi(n+1)}+\frac{\pi(-1)^n}{2\pi(n-1)}=\frac{(-1)^n n}{n^2-1}$$, ו- $$b_1=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x\cos x\sin xdx=-\frac{1}{2}$$

ולכן $$x\cos x\sim-\frac{1}{2}\sin x+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{n^2-1}\sin nx$$

ב. (4 נק') חשב את סכומי הטורים בנקודות $x=2010,\ x=2010\pi,\ x=2009\pi$.

לפי מחזוריות הגבול ב- 2010 זהה לגבול ב- $x_0=2010-2\pi\cdot 320$ כאשר $-\pi<x_0<\pi$, $x_0\approx-0.61$ ולפי משפט דיריכלה הוא שווה ל- $f(x_0)=x_0\cos x_0$.

לפי מחזוריות הגבול ב- 2010π זהה לגבול ב- 0 ולפי משפט דיריכלה הוא שווה ל- $f(0)=0$.

לפי מחזוריות הגבול ב- 2009π זהה לגבול ב- π ולפי משפט דיריכלה הוא שווה ל-

$$\frac{f(\pi-)+f(-\pi+)}{2}=\frac{\pi\cos\pi-\pi\cos-\pi}{2}=\frac{-\pi+\pi}{2}=0.$$

4. חשב $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\left|\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^{inx}}{2^n}\right|^2dx$.

נסמן $c_n=\begin{cases}\frac{1}{2^n} & n\ge 0\\ 0 & n<0\end{cases}$. לפי קריטריון M של ויירשטראס, הטור $F(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_ne^{inx}$ מתכנס במ"ש ולכן $F\sim\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_ne^{inx}$. לפי שוויון פרסבל

$$\int_{-\pi}^{\pi}|F(x)|^2dx=2\pi\sum_{n=-\infty}^{\infty}|c_n|^2=2\pi\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{2n}}=2\pi\frac{1}{1-1/4}=\frac{8\pi}{3}.$$

5. נסמן ב- $\varphi_{0,-1}(x),\varphi_{0,0}(x),\varphi_{0,1}(x),\varphi_{1,1}(x),\ldots$ את המערכת האורתונורמלית של האר.

א. (4 נק') חשב את הטור המתאים לפונקציה $f(x)=\begin{cases}1 & 0\le x<3/4\\ 0 & 3/4\le x<1\end{cases}$.

מאחר שהפונקציה היא פונקציה מציינת של קטע מהצורה $\left[\frac{a}{2^n},\frac{b}{2^n}\right]$, היא סכום סופי של פונקציות האר.

חישוב הנוסחא $\sum_{n,j}\langle f,\varphi_{j,n}\rangle\varphi_{j,n}$ נותן $f(x)=\frac{3}{4}\varphi_{0,-1}(x)+\frac{1}{2}\varphi_{0,0}(x)+\frac{\sqrt{2}}{4}\varphi_{1,1}(x)$.

ב. (2 נק') האם טור זה מתכנס נקודתית ובמידה שווה?

מאחר שהוא טור סופי הוא מתכנס נקודתית ובמידה שווה.

ג. (3 נק') חשב $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^1\varphi_{0,n}(x)\left(\varphi_{0,n}(x)+\sin\left(\frac{x^3}{1+x^2}\right)\right)dx$.

הביטוי הוא גבול של מכפלות פנימיות. לפי אורתונורמליות והלמה של רימן-לבג:

$$\lim_{n\to\infty}\left\langle \varphi_{0,n},\varphi_{0,n}+\sin\left(\frac{x^3}{1+x^2}\right)\right\rangle = 1+\lim_{n\to\infty}\left\langle \varphi_{0,n},\sin\left(\frac{x^3}{1+x^2}\right)\right\rangle = 1+0=1 .$$

6. א. (5 נק') נסמן $f_n(x)=\begin{cases} n & |x+1|\le 1/n \\ -n^2 & |x-2|\le 1/n^2 \\ 0 & else\end{cases}$. חשב את $\Lambda=\lim_{n\to\infty} f_n$ במובן של דיסטריבוציות.

נחשב את פעולת f_n על פונקציית מבחן φ כדיסטריבוציה, ונשתמש במשפט הערך הממוצע האינטגרלי:

$$\langle f_n,\varphi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f_n(x)\varphi(x)dx = \int_{-1-1/n}^{-1+1/n} n\varphi(x)dx + \int_{2-1/n^2}^{2+1/n^2} n^2\varphi(x)dx = \frac{2n\varphi(c_1)}{n} - \frac{2n^2\varphi(c_2)}{n^2} = 2\varphi(c_1)-2\varphi(c_2)$$

כאשר $2-1/n^2<c_2<2+1/n^2$, $-1-1/n<c_1<-1+1/n$. **אם משאיפים את** $n\to\infty$ **אז** $c_2\to 2$, $c_1\to -1$ **ולכן** $\langle f_n,\varphi\rangle \to 2\varphi(-1)-2\varphi(2)$. **כלומר** $\Lambda = 2\delta_{-1}-2\delta_2$.

ב.(4 נק') תהי φ פונקצית מבחן. הפעל את הדיסטריבוציה $\Lambda^{(2010)}$ על φ (כאשר $\alpha^{(k)}$ הנגזרת ה-k של α).

לפי הגדרת הנגזרת של דיסטריבוציה, $\alpha^{(2010)}(\varphi)=(-1)^{2010}\alpha\left(\varphi^{(2010)}\right)$. **לכן**

$$\Lambda^{(2010)}(\varphi)=2\varphi^{(2010)}(-1)-2\varphi^{(2010)}(2)$$