אנליזת פורייה להנדסת חשמל

פתרון בוחן מס' 1

1. (א) עלינו למצוא את ההיטל האורתוגונלי $f^*(x)$ של $h(x) = |x|$ על $\{e_1, e_2, e_3\}$ כאשר $\{e_1, e_2, e_3\}$ בסיס אורתונורמלי ל $span\{1, x, x^2\}$, ביחס למכפלה הפנימית $\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)\bar{g}(x)dx$. אם כן, $u_1 = 1$.
$e_1 = u_1/\|u_1\| = 1/\|1\| = 1/\sqrt{\int_{-1}^{1} 1^2 dx} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.
$u_2 = x - \langle x, e_1\rangle = x - \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} x dx = x$.
$e_2 = u_2/\|u_2\| = x/\sqrt{\int_{-1}^{2} x^2 dx} = \sqrt{\frac{3}{2}}x$.
$u_3 = x^2 - \langle x^2, e_2\rangle - \langle x^2, e_1\rangle = x^2 - \langle x^2, e_1\rangle = x^2 - \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} x^2 dx = x^2 - \frac{1}{3}$.
$e_3 = u_3/\|u_3\| = (x^2 - \frac{1}{3})/\sqrt{\int_{-1}^{1}(x^4 - \frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{9})dx} = (x^2 - \frac{1}{3})/\sqrt{\frac{2}{5} - \frac{2}{9}} = \sqrt{\frac{45}{8}}(x^2 - \frac{1}{3})$.
כעת $f^* = \sum_{i=1}^{3}\langle h, e_i\rangle e_i = \sum_{i=1}^{3}\langle |x|, e_i\rangle e_i =$
$(\int_{-1}^{1}|x|\frac{1}{\sqrt{2}}dx)\frac{1}{\sqrt{2}} + (\int_{-1}^{1}|x|\sqrt{\frac{3}{2}}xdx)\sqrt{\frac{3}{2}}x +$
$(\int_{-1}^{1}|x|\sqrt{\frac{45}{8}}(x^2 - \frac{1}{3})dx)\sqrt{\frac{45}{8}}(x^2 - \frac{1}{3}) =$
$\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} + 0\cdot\sqrt{\frac{3}{2}}x + \sqrt{\frac{45}{8}}\frac{1}{6}\cdot\sqrt{\frac{45}{8}}(x^2 - \frac{1}{3}) = \frac{3}{16} + \frac{15}{16}x^2 = a + bx + cx^2$
כלומר $a = \frac{3}{16}, b = 0, c = \frac{15}{16}$.

(ב) נשים לב כי אם נתבונן שוב על ההיטל האורתוגונלי של h על $span\{1, x, x^2\}$ נוכל לרשום
$a + b(x-1) + c(x-1)^2 = a - b + c + (b - 2c)x + cx^2$ ולכן המקדמים המבוקשים מקיימים $a - b + c = \frac{3}{16},\ b - 2c = 0,\ c = \frac{15}{16}$ ונקבל $a = \frac{18}{16},\ b = \frac{30}{16},\ c = \frac{15}{16}$.

(ג) נשים לב כי $|x| \perp x^3$, וראינו בסעיף 1א כי $|x| \perp x$. מאחר ובתהליך גרם שמידט למציאת בסיס אורתונורמלי ל $span\{1, x, x^2, x^3\}$ נקבל וקטור נוסף e_4 שהינו צרוף לינארי של x, x^3, נקבל מייד כי $|x| \perp e_4$ ולכן a, b, c כמו בסעיף 1א ו $d = 0$.

2. (א) אנו מעוניינים למצוא $f \in C^1[-\pi, \pi]$ עם המכפלה הפנימית $\langle f, g\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\bar{g}(x)dx + \int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\bar{g}'(x)dx$, כאשר $\langle f, 1\rangle = 1, \langle f, \sin 2x\rangle = \frac{1}{2}, \langle f, \sin 5x\rangle = \frac{1}{3}$. נשים לב כי $\{1, \sin nx\}_{n=1}^{\infty}$ מערכת אורתוגונלית. לכן ניקח
$f = \frac{\langle f,1\rangle}{\|1\|^2}\cdot 1 + \frac{\langle f,\sin 2x\rangle}{\|\sin 2x\|^2}\cdot\sin 2x + \frac{\langle f,\sin 5x\rangle}{\|\sin 5x\|^2}\cdot\sin 5x =$

$\frac{1}{\|1\|^2}\cdot 1+\frac{1/2}{\|\sin 2x\|^2}\cdot\sin 2x+\frac{1/3}{\|\sin 5x\|^2}\cdot\sin 5x$,
כאשר $\|1\|^2=\int_{-\pi}^{\pi}1^2dx=2\pi$,
ו $\|\sin nx\|^2=\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 nxdx+n^2\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 nxdx=(1+n^2)\pi$, ולכן
$\|\sin 2x\|^2=5\pi, \|\sin 5x\|^2=26\pi$, ולבסוף
$f=\frac{1}{2\pi}+\frac{1}{10\pi}\sin 2x+\frac{1}{78\pi}\sin 5x$.

(ב) למעשה, אנו מעוניינים ב $f\in C^1[-\pi,\pi]$ כך ש
$\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{\sqrt{n}}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx+\sqrt{n}\int_{-\pi}^{\pi}f'(x)\cos nxdx)=$
$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}(\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx+n\int_{-\pi}^{\pi}f'(x)\cos nxdx)=$
$\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{(1+n^2)\pi}{n}}\langle f,e_n\rangle=1$.
מאי שוויון בסל עבור המערכת האורתונורמלית
$\{e_1=\frac{1}{\sqrt{2\pi}},e_n=\frac{1}{\sqrt{(1+n^2)\pi}}\sin nx\}$ נובע ש $\sum_{n=1}^{\infty}|\langle f,e_n\rangle|^2<\infty$.
f שלנו צריכה אפוא לקיים
$\sqrt{\frac{(1+n^2)\pi}{n}}\langle f,e_n\rangle\sim\sqrt{n}\langle f,e_n\rangle\to 1, n\to\infty$ כלומר
$\langle f,e_n\rangle\sim\frac{1}{\sqrt{n}},\ n\to\infty$, ולכן $\sum_{n=1}^{\infty}|\langle f,e_n\rangle|^2\sim\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=\infty$ וקיבלנו סתירה.

3. נתבונן במכפלה הפנימית הסטנדרטית $\langle u,v\rangle=\int_{-1}^{1}u(x)\bar{v}(x)dx, \forall u,v\in L^2_{PC}[-1,1]$. אנו מעוניינים אם כן בפונקציה g כך ש $\|f-g\|_2^2\le\|f-h\|_2^2$ לכל $h\in L^2_{PC}[-1,1]$ זוגית. למעשה אנו מעוניינים להראות כי הקרוב המיטבי ל f מתת מרחב הפונקציות הזוגיות של $L^2_{PC}[-1,1]$ הינו $g(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2}$.

נשיב לב כי $f(x)-g(x)$ מקיימת
$f(x)-g(x)=(f-g)(x)=\frac{f(x)-f(-x)}{2}=-(f-g)(-x)=-(f(-x)-g(-x))$, כלומר אי זוגית. לכן $f-g\perp h$.
אם כן, $\|f-h\|_2^2=\|f-g+g-h\|_2^2=\|f-g\|_2^2+\|g-h\|_2^2$, כאשר השוויון האחרון נובע מהעובדה ש $f-g\perp g-h$ ($f-g, g-h$ אי זוגית, זוגית בהתאמה). על כן $\|f-g\|_2^2\le\|f-h\|_2^2$.