אנליזת פורייה להנדסת חשמל

פתרון בוחן מס' 2

1. (א) נסמן

$$I_n=\int_{-\pi}^{\pi}\cos(x/2)e^{-inx}dx$$

ונקבל ע"י אינטגרציה בחלקים

$$I_n=2\sin(x/2)e^{-inx}|_{-\pi}^{\pi}+2in\left(-2\cos(x/2)e^{-inx}|_{-\pi}^{\pi}-2inI_n\right)=$$

$$=4(-1)^n+4n^2I_n.$$

ולכן

$$I_n=\frac{(-1)^{n+1}}{n^2-1/4}.$$

כעת

$$\cos(x/2)\sim\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_ne^{inx}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{I_n}{2\pi}e^{inx}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2\pi(n^2-1/4)}e^{inx}=$$

$$=\frac{2}{\pi}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2\pi(n^2-1/4)}\left(e^{inx}+e^{-inx}\right)=\frac{2}{\pi}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\pi(n^2-1/4)}\cos(nx),$$

כאשר $a_0=\frac{4}{\pi},\ a_n=\frac{(-1)^{n+1}}{\pi(n^2-1/4)},n=1,2,3...$ מקדמי פורייה הממשיים ($\cos(x/2)$ פונקציה זוגית ולכן מקדמי פורייה $b_n,\ n\geq 1$ מתאפסים).

(ב) $f(x)=\cos(x/2)$ רציפה ב $[-\pi,\pi]$, לכן מתקיים עבורה שוויון פרסבל

$$\frac{|a_0|^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^2=\|f\|^2=\frac{8}{\pi^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\pi^2(n^2-1/4)}=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2dx=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2(x/2)dx=1,$$

ולכן

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2-1/4}=\pi^2-8$$

(ג) בהמשך לאמור בסעיף 1ב נשים לב גם כי $f(x)=\cos(x/2)$ מקיימת $f(\pi)=f(-\pi)=0$ ולכן מקיימת את תנאי משפט פז'ר $\sigma_N(f,x)\to f$ במידה שווה על $[-\pi,\pi]$, כאשר $\sigma_N(f,x)=\frac{1}{N+1}\sum_{m=0}^{N}S_m$ ממוצעי פז'ר . אצלנו

$$S_0=\frac{2}{\pi},\ S_m=\frac{2}{\pi}+\sum_{n=1}^{m}\frac{(-1)^{n+1}}{\pi(n^2-1/4)}\cos(nx),\ m=1,2,...,N,$$

ולכן הגבול המבוקש מקיים

$$\lim_{N\to\infty}\sigma_N(f,\pi)=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N+1}\left[\frac{2}{\pi}+\sum_{m=1}^{n}\left(\frac{2}{\pi}+\sum_{n=1}^{m}\frac{-1}{\pi(n^2-1/4)}\right)\right]=$$

$$=f(\pi)=\cos(\pi/2)=0$$

2. (א) עבור $j=k$ נקבל

$$\langle 2^{n/2}\chi_k,2^{n/2}\chi_k\rangle=2^n\int_0^1\chi_k^2dx=2^n\int_{k/2^n}^{(k+1)/2^n}dx=1.$$

עבור $j\neq k$ נקבל כמובן $\langle 2^{n/2}\chi_j,2^{n/2}\chi_k\rangle=0$ ולכן $\langle 2^{n/2}\chi_j,2^{n/2}\chi_k\rangle=\delta_{j,k}$. נסמן ב $V\subset L^2_{PC}[0,1]$ את תת מרחב הפונקציות הקבועות למקוטעין ב $[0,1]$, המקבלות ערכים קבועים ב $[0,\frac{1}{2^n}],...,[\frac{2^n-1}{2^n},1]$. ברור כי $V=\text{span}\{2^{n/2}\chi_j\}_{j=0}^{2^n-1}$. ניקח $\sum_{j=0}^{2^n-1}a_j2^{n/2}\chi_j=0$. כעת, עם ניקח את המכפלה הפנימית עם $2^{n/2}\chi_k$ נקבל מתנאי האורתונורמליות כי לכל $0\leq k\leq 2^n-1$

$$0=\sum_{j=0}^{2^n-1}a_j\langle 2^{n/2}\chi_j,2^{n/2}\chi_k\rangle=\sum_{j=0}^{2^n-1}a_j\delta_{j,k}=a_k,$$

ולכן $\{2^{n/2}\chi_j\}_{j=0}^{2^n-1}$ קבוצה פורשת בלתי תלויה לינארית של V ולכן בסיס אורתונורמלי של V.

(ב) נשים לב כי למעשה אנו מעוניינים במינימיזציה של

$$\|f-\sum_{j=0}^{2^n-1}c_j\chi_j\|^2$$

שזהו המרחק (בריבוע) של f מאיבר ב V. כעת נחשב

$$\|f-\sum_{j=0}^{2^n-1}c_j\chi_j\|^2=\langle f-\sum_{j=0}^{2^n-1}c_j\chi_j,f-\sum_{j=0}^{2^n-1}c_j\chi_j\rangle=$$

$$=\|f\|^2-2\sum_{j=0}^{2^n-1}c_j\langle f,\chi_j\rangle+\sum_{j=0}^{2^n-1}c_j^2/2^n.$$

בטוי זה כמובן מינימילי כאשר

$$c_k=2^n\langle f,\chi_k\rangle=\frac{\langle f,\chi_k\rangle}{\|\chi_k\|^2}=2^n\int_{k/2^n}^{(k+1)/2^n}f(x)dx,$$

לכל $0\le k\le 2^n-1$. נציב ונקבל

$$\|f\|^2-2^n\sum_{j=0}^{2^n-1}|\langle f,\chi_j\rangle|^2=\|f\|^2-2^n\sum_{j=0}^{2^n-1}\left|\int_{j/2^n}^{(j+1)/2^n}f(x)dx\right|^2.$$

(ג) ידוע כי

$$\sum_{m=0}^{2^n-1}\langle f,\varphi_m\rangle\varphi_m$$

קרוב מיטבי לפונקציות ב $L^2_{PC}[0,1]$ ע"י איבר מ V. מצד שני, מסעיף 2ב נובע כי

$$2^n\sum_{m=0}^{2^n-1}\langle f,\chi_m\rangle\chi_m=\sum_{m=0}^{2^n-1}\frac{\langle f,\chi_m\rangle}{\|\chi_m\|^2}\chi_m.$$

קרוב מיטבי מ V. קירוב מיטבי הינו יחיד ולכן

$$\sum_{m=0}^{2^n-1}\frac{\langle f,\chi_m\rangle}{\|\chi_m\|^2}\chi_m=\sum_{m=0}^{2^n-1}\langle f,\varphi_m\rangle\varphi_m$$

וסיימנו.

(ד) מסעיף 2ג נובע כי

$$\|f-\sum_{m=0}^{2^n-1}\frac{\langle f,\chi_m\rangle}{\|\chi_m\|^2}\chi_m\|^2=\|f-\sum_{m=0}^{2^n-1}\langle f,\varphi_m\rangle\varphi_m\|^2=$$

$$=\|f\|^2-2^n\sum_{j=0}^{2^n-1}\left|\int_{j/2^n}^{(j+1)/2^n}f(x)dx\right|^2.$$

אנו יודעים גם כי מערכת $Haar$ סגורה ב $L^2_{PC}[0,1]$, לכן משוויון פרסבל נובע כי

$$\|f-\sum_{m=0}^{2^n-1}\langle f,\varphi_m\rangle\varphi_m\| \to 0$$

וסיימנו.

3. (א) יהי $\epsilon>0$, על כן קיים n_0 כך ש $\|v_n-v\|<\epsilon/2$ ו $\|v_n-w\|<\epsilon/2$ לכל $n>n_0$. לכן $\|v-w\|\leq\|v-v_n\|+\|w-v_n\|<\epsilon$. אי השוויון $\|v-w\|<\epsilon$ מתקיים לכל $\epsilon>0$, ולכן $\|v-w\|=0$, ולכן $v=w$.

(ב) נביא דוגמה לסדרה מתכנסת לאפס בנורמת $\|\cdot\|_\infty$ אך אינה מתכנסת לאפס בנורמת $\|\cdot\|_1$. ניקח

$$f_n(x)=\begin{cases}\frac{1}{n^2}(x-n) & n\leq x\leq 2n\\ -\frac{1}{n^2}(x-3n) & 2n\leq x\leq 3n\\ 0 & \text{אחרת.}\end{cases}$$

אזי $\sup_x|f_n(x)-0|=\frac{1}{n}\to 0$, אבל

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f_n(x)-0|dx=\int_n^{2n}\frac{1}{n^2}(x-n)dx-\int_{2n}^{3n}\frac{1}{n^2}(x-3n)dx=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1.$$

(ג) נביא דוגמה לסדרה מתכנסת לאפס בנורמת $\|\cdot\|_1$ אך אינה מתכנסת לאפס בנורמת $\|\cdot\|_\infty$. ניקח

$$g_n(x)=\begin{cases}2nx & 0\leq x\leq\frac{1}{2n}\\ -2n\left(x-\frac{1}{n}\right) & \frac{1}{2n}\leq x\leq\frac{1}{n}\\ 0 & \text{אחרת.}\end{cases}$$

אזי

$$\int_{-\infty}^{\infty}|g_n(x)-0|dx=\int_0^{1/2n}2nxdx-\int_{1/2n}^{1/n}2n\left(x-\frac{1}{n}\right)dx=$$

$$\frac{1}{4n}+\frac{1}{4n}=\frac{1}{2n}\to 0,$$

אבל $\sup_x|g_n(x)-0|=1$.

(ד) נקבע מספר ממשי $M>0$. נגדיר

$$V_M=\{f|_{[-M,M]}\ |f\in V\}$$

, כאשר $f|_{[-M,M]}$ מסמן את הצמצום של f ל $[-M,M]$. על V_M נשרה את אותן הנורמות: לכל $f\in V_M$ $\|f\|_1=\int_{-M}^{M}|f(x)|dx$, $\|f\|_\infty=\sup_{x\in[-M,M]}|f(x)|$. לכל $\{f_n\}\subset V_M, f_M\in V_M$ מתקיים

$$\|f_n-f_M\|_1=\int_{-M}^{M}|f_n(x)-f_M(x)|dx\leq 2M\sup_{x\in[-M,M]}|f_n(x)-f_M(x)|=$$

$$2M\|f_n-f_M\|_\infty.$$

לכן $\|f_n-f_M\|_\infty\to 0$ גורר $\|f_n-f_M\|_1\to 0$. ברור (מהגדרת V_M) כי אם $\{f_n\}\subset V$ סדרה מתכנסת בנורמת $\|\cdot\|_\infty$ אזי $\{f_n\}$ מתכנסת גם ב V_M בנורמת $\|\cdot\|_\infty$. לכן קיימת $f_M\in V_M$ כך ש $\|f_n-f_M\|_\infty\to 0$, ולכן $\|f_n-f_M\|_1\to 0$. כמוכן מהנתון נובע כי קיימת $g_M\in V_M$ כך ש $\|f_n-g_M\|_1\to 0$. מסעיף 3א נובע כי $f_M=g_M$. שוויון זה נכון לכל $M>0$ ולכן $f=g$.