

הגדרות ונוסחאות:

וקטורים u_1, u_2, \dots בממ"פ מהווים קבוצה אורתוגונאלית אם לכל i , $u_i \neq 0$, ולכל $i \neq j$, $\langle u_i, u_j \rangle = 0$. קבוצה כזו נקראת אורתונורמלית אם היא אורתוגונאלית ו- $\|u_i\| = 1$ לכל i .

אי-שוויון קושי-שוורץ: $\langle u, v \rangle \leq \|u\| \|v\|$ לכל u, v , כאשר הנורמה נובעת מהמכפלה הפנימית: $\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle}$.

ההיטל על תת-מרחב: אם u_1, \dots, u_n קבוצה אורתונורמלית אז ההיטל של v על תת-המרחב $\text{span}\{u_1, \dots, u_n\}$ הוא $\sum_{i=1}^n \langle v, u_i \rangle u_i$.

התכנסות בנורמה: $u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} u$ בנורמה אם $\|u_n - u\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

אי שוויון בסל: אם u_1, u_2, \dots קבוצה אורתונורמלית ו- $v \in V$ אז $\sum_{n=1}^{\infty} |\langle v, u_n \rangle|^2 \leq \|v\|^2$. אם מתקיים שוויון הוא נקרא שוויון פרסבל.

קבוצה אורתונורמלית סגורה: קבוצה אורתונורמלית u_1, u_2, \dots כך שלכל $v \in V$, $\sum_{i=1}^{\infty} \langle v, u_i \rangle u_i \xrightarrow{n \rightarrow \infty} v$ בנורמה.

הלמה של רימן לבג: אם u_1, u_2, \dots קבוצה אורתונורמלית אז לכל $v \in V$, $\langle u_n, v \rangle \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

פונקציות האר: $\varphi_0(x) \equiv 1$, אחרת $\varphi_{j+2^n}(x) = \begin{cases} 2^{n/2} & \frac{j}{2^n} \leq x \leq \frac{2j+1}{2^{n+1}} \\ -2^{n/2} & \frac{2j+1}{2^{n+1}} < x \leq \frac{j+1}{2^n} \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$, $j = 0, \dots, 2^n - 1$, $n \geq 0$.

זהויות טריגונומטריות: $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$

$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]$

$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$

$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$

$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)]$

$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)]$

$\sin n\pi = 0, \cos n\pi = (-1)^n, n \in \mathbb{Z}$

$\sin x = -\sin(-x), \cos x = \cos(-x), \sin(\theta + \pi/2) = \cos \theta$

מרחבים וקטוריים: $C[a, b]$ - הפונקציות הרציפות $[a, b] \rightarrow \mathbb{C}$

$PC[a, b]$ - הפונקציות הרציפות למקוטעין $[a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ (מספר סופי לכל היותר של נקודות אי רציפות, קיימים גבולות חד צדדיים בכל נקודה).

ℓ^2 אוסף הסדרות האינסופיות של מספרים מרוכבים (x_i) כך ש- $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2 < \infty$.

$L^1_{PC}(\mathbb{R})$ - הפונקציות הרציפות למקוטעין $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ המקיימות

$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx < \infty$. מסומן גם $G(\mathbb{R})$.

$L^2_{PC}(\mathbb{R})$ - הפונקציות הרציפות למקוטעין $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ המקיימות

$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx < \infty$.

\mathcal{D} - אוסף פונקציות המבחן - פונקציות $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ גזירות מכל סדר בעלות תומך סופי.

נורמות על מרחבי פונקציות: $\|f\|_2 = \sqrt{\int_a^b |f(x)|^2 dx}$, $\|f\|_1 = \int_a^b |f(x)| dx$

(נובע מהמכפלה הפנימית $\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x) \overline{g(x)} dx$)

$\|f\|_{\infty} = \sup_{a \leq x \leq b} |f(x)|$. בנוסחאות אלה יתכן גם $a = -\infty$ ו/או $b = \infty$.

טור פורייה: $f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos nx + b_n \sin nx]$

$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nxdx$, $a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nxdx$

טור פורייה מרוכב: $f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$ כאשר $c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx$

טור פורייה על קטע $[a, b]$: $f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos \frac{2n\pi x}{b-a} + b_n \sin \frac{2n\pi x}{b-a}]$ כאשר

$b_n = \frac{2}{b-a} \int_a^b f(x) \sin \frac{2n\pi x}{b-a} dx$, $a_n = \frac{2}{b-a} \int_a^b f(x) \cos \frac{2n\pi x}{b-a} dx$

טור פורייה מרוכב על קטע $[a, b]$: $f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\frac{2n\pi ix}{b-a}}$ כאשר

$c_n = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) e^{-\frac{2n\pi ix}{b-a}} dx$

גרעין דיריכלה: $D_m(t) = \frac{\sin(m+1/2)t}{2\sin t/2} = \frac{1}{2} + \cos t + \dots + \cos mt$ (הערה: לפעמים כופלים ב-2).

גרעין פייר: $F_N(t) = \frac{1}{N+1} \sum_{m=0}^N D_m(t)$

סכום פורייה ופייר: $\sigma_N(x) = \frac{\sum_{n=0}^N S_n(x)}{N+1}$, $S_N(x) = \sum_{n=-N}^N c_n e^{inx}$

קונבולוציה בקטע $[-\pi, \pi]$: $f * g(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)g(t)dt$

על הישר: $f * g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)g(t)dt$

התמרת פורייה: $\mathfrak{S}[f](\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x} dx$

לינאריות: $\mathfrak{S}[af + bg] = a\mathfrak{S}[f] + b\mathfrak{S}[g]$

הזזה: $\mathfrak{S}[f(ax + b)](\omega) = \frac{1}{|a|} e^{\frac{i\omega b}{a}} \mathfrak{S}[f]\left(\frac{\omega}{a}\right)$

סיבוב: $\mathfrak{S}[e^{icx} f(x)](\omega) = \mathfrak{S}[f](\omega - c)$

נגזרת: אם $f, f' \in L^1_{PC}(\mathbb{R})$ ו- $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$ אז $\mathfrak{S}[f'](\omega) = i\omega \mathfrak{S}[f](\omega)$

הכפלה ב- x : אם $f(x), xf(x) \in L^1_{PC}(\mathbb{R})$ אז $\mathfrak{S}[xf(x)] = i \frac{d}{d\omega} \mathfrak{S}[f](\omega)$

התמרות בסיסיות:

$$\mathfrak{S}[e^{-x^2}] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\omega^2/4}, \quad \mathfrak{S}[1_{[a,b]}] = \frac{e^{-i\omega a} - e^{-i\omega b}}{2\pi i \omega}, \quad \mathfrak{S}[e^{-|x|}] = \frac{1}{\pi(1+\omega^2)}$$

נוסחאות ההיפוך א. $f \in L^1_{PC}(\mathbb{R})$ רציפה, $F = \mathfrak{S}[f] \in L^1_{PC}(\mathbb{R})$ אז

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega x} d\omega$$

ב. $f \in L^1_{PC}(\mathbb{R})$ בעלת נגזרות חד-צדדיות ב- x אז

$$\frac{f(x+) + f(x-)}{2} = \lim_{M \rightarrow \infty} \int_{-M}^M F(\omega) e^{i\omega x} d\omega$$

נוסחת פלנשרל המוכללת: $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \overline{g(x)} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \mathfrak{S}[f](\omega) \overline{\mathfrak{S}[g](\omega)} d\omega$

$$f, g \in L^1 \cap L^2$$

קונבולוציה: $\mathfrak{S}[f * g] = 2\pi \mathfrak{S}[f] \mathfrak{S}[g]$

התמרת לפלס: $L[f](s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$ כאשר $f : (0, \infty) \rightarrow C$ רציפה למקוטעין והאינטגרל קיים.

התמרות בסיסיות: $L[1] = \frac{1}{s}$, $L[e^{zt}] = \frac{1}{s-z}$, $s > \text{Re}z$, $L[u_c] = \frac{e^{-cs}}{s}$, $c, s > 0$

נגזרת: $L[f'] = sL[f] - f(0)$ ו- $L[f^{(n)}] = s^n L[f] - s^{n-1} f(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)$

$$L[e^{at} f] = L[f(at)] = \frac{1}{a} L[f]\left(\frac{s}{a}\right), \quad L[t^n f] = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} L[f], \quad L[f](s-a)$$

דיסטריבוטיות: פונקציונלים לינאריים רציפים $\mathcal{D} \rightarrow R$

$$\Lambda'(\varphi) = -\Lambda(\varphi')$$

התכנסות דיסטריבוטיות: $\Lambda_n \rightarrow \Lambda$ אם $\Lambda_n(\varphi) \rightarrow \Lambda(\varphi)$ לכל פונקציה מבחן $\varphi \in \mathcal{D}$