הגדרות ונוסחאות:

וקטורים $u_1, u_2 \ldots$ בממ"פ מהווים **קבוצה אורתוגונאלית** אם לכל i, $u_i \neq 0$, ולכל $i \neq j$, $\langle u_i, u_j \rangle = 0$. קבוצה כזו נקראת **אורתונורמלית** אם היא אורתוגונאלית ו-$\|u_i\| = 1$ לכל i.

אי-שוויון קושי-שוורץ: $|\langle u, v\rangle| \le \|u\| \|v\|$ לכל u, v כאשר הנורמה נובעת מהמכפלה הפנימית: $\|u\| = \sqrt{\langle u, u\rangle}$.

ההיטל על תת-מרחב: אם $u_1, \ldots, u_n$ קבוצה אורתונורמלית אז ההיטל של v על תת-המרחב $\operatorname{span}\{u_1, \ldots, u_n\}$ הוא $\sum_{i=1}^{n} \langle v, u_i\rangle u_i$.

התכנסות בנורמה: $u_n \xrightarrow{n\to\infty} u$ בנורמה אם $\|u_n - u\| \xrightarrow{n\to\infty} 0$

אי שויון בסל: אם $u_1, u_2 \ldots$ קבוצה אורתונורמלית ו-$v \in V$ אז $\sum_{n=1}^{\infty} |\langle v, u_i\rangle|^2 \le \|v\|^2$. אם מתקיים שויון הוא נקרא **שויון פרסבל.**

קבוצה אורתונורמלית סגורה: קבוצה אורתונורמלית $u_1, u_2 \ldots$ כך שלכל $v \in V$, $\sum_{i=1}^{n} \langle v, u_i\rangle u_i \xrightarrow{n\to\infty} v$ בנורמה.

הלמה של רימן לבג: אם $u_1, u_2 \ldots$ קבוצה אורתונורמלית אז לכל $v \in V$, $\langle u_n, v\rangle \xrightarrow{n\to\infty} 0$.

פונקציות האר: $\varphi_0(x) \equiv 1$, $\varphi_{j+2^n}(x) = \begin{cases} 2^{n/2} & \frac{j}{2^n} \le x \le \frac{2j+1}{2^{n+1}} \\ -2^{n/2} & \frac{2j+1}{2^{n+1}} < x \le \frac{j+1}{2^n} \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$ כאשר $n \ge 0$, $j = 0, \ldots, 2^n - 1$.

זהויות טריגונומטריות: $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$,
$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\right]$,
$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$,
$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$,
$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)\right]$,
$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left[\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)\right]$
$\sin n\pi = 0, \cos n\pi = (-1)^n, n \in \mathbb{Z}$
$\sin(\theta + \pi/2) = \cos\theta$, $\cos x = \cos(-x)$, $\sin x = -\sin(-x)$

מרחבים וקטוריים: $C[a,b]$ - הפונקציות הרציפות $[a,b] \to \mathbb{C}$

$PC[a,b]$ - הפונקציות הרציפות למקוטעין $[a,b] \to \mathbb{C}$ (מספר סופי לכל היותר של נקודות אי רציפות, קיימים גבולות חד צדדיים בכל נקודה).

ℓ^2 אוסף הסדרות האינסופיות של מספרים מרוכבים (x_i) כך ש-$\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2 < \infty$.

$L^1_{PC}(\mathbb{R})$ - הפונקציות הרציפות למקוטעין $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ המקיימות $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx < \infty$. מסומן גם $G(\mathbb{R})$.

$L^2_{PC}(\mathbb{R})$ - הפונקציות הרציפות למקוטעין $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ המקיימות $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx < \infty$.

$\mathcal{D}$- אוסף פונקציות המבחן - פונקציות $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ גזירות מכל סדר בעלות תומך סופי.

נורמות על מרחבי פונקציות: $\|f\|_1 = \int_a^b |f(x)|\, dx$. $\|f\|_2 = \sqrt{\int_a^b |f(x)|^2\, dx}$ (נובע מהמכפלה הפנימית $\langle f, g\rangle = \int_a^b f(x)\overline{g(x)} dx$) $\|f\|_\infty = \sup_{a \le x \le b} |f(x)|$. בנוסחאות אלה יתכן גם $a = -\infty$ ו/או $b = \infty$.

טור פורייה: $f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos nx + b_n \sin nx\right]$,
$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx$, $b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx$.

טור פורייה מרוכב: $f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$ כאשר $c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx$.

טור פורייה על קטע $[a,b]$: $f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \cos\frac{2n\pi x}{b-a} + b_n \sin\frac{2n\pi x}{b-a}\right]$ כאשר $a_n = \frac{2}{b-a}\int_a^b f(x)\cos\frac{2n\pi x}{b-a} dx$, $b_n = \frac{2}{b-a}\int_a^b f(x)\sin\frac{2n\pi x}{b-a} dx$.

טור פורייה מרוכב על קטע $[a,b]$: $f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\frac{2n\pi i x}{b-a}}$ כאשר $c_n = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x) e^{-\frac{2n\pi i x}{b-a}} dx$.

גרעין דיריכלה: $D_m(t)=\frac{\sin(m+1/2)t}{2\sin t/2}=\frac{1}{2}+\cos t+\cdots+\cos mt$(הערה: לפעמים כופלים

גרעין פייר: $F_N(t)=\frac{1}{N+1}\sum_{m=0}^{N}D_m(t)$.

סכום פורייה ופייר: $S_N(x)=\sum_{n=-N}^{N}c_ne^{inx}$. $\sigma_N(x)=\frac{\sum_{n=0}^{N}S_n(x)}{N+1}$

קונבולוציה בקטע $[-\pi,\pi]$ $f*g(x)=\int_{-\pi}^{\pi}f(x-t)g(t)dt$.
על הישר: $f*g(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x-t)g(t)dt$.

התמרת פורייה: $\Im[f](w)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-iwx}dx$.
לינאריות: $\Im\left[af+bg\right]=a\Im[f]+b\Im[g]$.

הזזה: $\Im\left[f(ax+b)\right](\omega)=\frac{1}{|a|}e^{\frac{i\omega b}{a}}\Im[f]\left(\frac{\omega}{a}\right)$.
סיבוב: $\Im\left[e^{icx}f(x)\right](\omega)=\Im[f](\omega-c)$.

נגזרת: אם $f,f'\in L^1_{PC}(\mathbb{R})$ ו-$\lim_{x\to\pm\infty}f(x)=0$ אז $\Im[f'](\omega)=i\omega\Im[f](\omega)$.

הכפלה ב-x: אם $f(x),xf(x)\in L^1_{PC}(\mathbb{R})$ אז $\Im\left[xf(x)\right]=i\frac{d}{d\omega}\Im[f](\omega)$.

התמרות בסיסיות:
$\Im[e^{-|x|}]=\frac{1}{\pi(1+\omega^2)}$, $\Im\left[1_{[a,b]}\right]=\frac{e^{-i\omega a}-e^{-i\omega b}}{2\pi i\omega}$, $\Im\left[e^{-x^2}\right]=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}e^{-\omega^2/4}$.

נוסחאות ההיפוך א. $f\in L^1_{PC}(\mathbb{R})$ רציפה, $F=\Im[f]\in L^1_{PC}(\mathbb{R})$ אז $f(x)=\int_{-\infty}^{\infty}F\left(\omega\right)e^{i\omega x}d\omega$.

ב. $f\in L^1_{PC}(\mathbb{R})$ בעלת נגזרות חד-צדדיות ב-x אז

$$\frac{f(x+)+f(x-)}{2}=\lim_{M\to\infty}\int_{-M}^{M}F\left(\omega\right)e^{i\omega x}d\omega.$$

נוסחת פלנשרל המוכללת: $\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\overline{g(x)}dx=\int_{-\infty}^{\infty}\Im[f](\omega)\overline{\Im[g](\omega)}d\omega$ עבור $f,g\in L^1\bigcap L^2$.

קונבולוציה: $\Im\left[f*g\right]=2\pi\Im[f]\Im[g]$.

התמרת לפלס: $\mathcal{L}[f](s)=\int_0^{\infty}e^{-st}f(t)dt$ כאשר $f:(0,\infty)\to C$ רציפה למקוטעין והאינטגרל קיים.

התמרות בסיסיות: $\mathcal{L}[1]=\frac{1}{s}$, $\mathcal{L}\left[e^{zt}\right]=\frac{1}{s-z}$, $s>Rez$. $\mathcal{L}\left[u_c\right]=\frac{e^{-cs}}{s}$ כאשר $c,s>0$.

נגזרת: $\mathcal{L}[f']=s\mathcal{L}[f]-f(0)$ ו-$\mathcal{L}[f^{(n)}]=s^n\mathcal{L}[f]-s^{n-1}f(0)-\cdots-f^{(n-1)}(0)$.
$\mathcal{L}[t^nf]=(-1)^n\frac{d^n}{ds^n}\mathcal{L}[f]$, $\mathcal{L}[f(at)]=\frac{1}{a}\mathcal{L}[f]\left(\frac{s}{a}\right)$ עבור $a>0$, $\mathcal{L}[e^{at}f]=\mathcal{L}[f](s-a)$.

התמרת לפלס הפוכה: תהא f רציפה על $[0,\infty)$ עם נגזרות חד צדדיות בכל נקודה, כך ש-$\int_0^{\infty}|f(t)E^{at}|\,dt<\infty$, ותהא $F=\mathcal{L}[f]$. אזי

$$f(t)=\frac{1}{2\pi i}\text{p.v.}\int_{s-i\cdot\infty}^{s+i\cdot\infty}e^{\sigma t}F(\sigma)\,d\sigma=\frac{1}{2\pi i}\lim_{A\to\infty}\int_{s-iA}^{s+iA}e^{\sigma t}F(\sigma)\,d\sigma$$

לכל $t>0$. כאן $a<s$ כלשהו.

אם בנוסף F אנליטית בכל $\mathbb{C}$ מלבד מספר סופי של קטבים $\{p_j\}_{j=1}^{n}$, ומתקיים $\lim_{\sigma\to\infty}F(\sigma)=0$, אזי

$$f(t)=\sum_{j=1}^{n}\text{Res}(p_j,F(\sigma)e^{\sigma t})$$

דיסטריבוציות: פונקציונלים לינאריים רציפים $\mathcal{D}\to R$.
גזירת דיסטריבוציה: $\Lambda'\left(\varphi\right)=-\Lambda\left(\varphi'\right)$

התכנסות דיסטריבוציות: $\Lambda_n\to\Lambda$ אם $\Lambda_n(\varphi)\to\Lambda(\varphi)$ לכל פונקצית מבחן $\varphi\in\mathcal{D}$.