שאלה 1

א) $u \in D$. נגדיר

$$u_n(x) = \int_{-n}^{n} e^{-iwx}\hat{u}(-\omega)d\omega$$

צ"ל: $u_n \longrightarrow u$ במ"ש.

<u>הוכחה:</u> החלפת משתנים נותנת

$$u_n(x) = \int_{-n}^{n} e^{iwx}\hat{u}(\omega)d\omega$$

לפי נוסחת ההיפוך (גרסה א' בדף הנוסחאות) מתקיים $u_n(x) \longrightarrow u(x)$ נקודתית.

צריך להראות שההתכנסות היא במידה שווה. לשם כך מספיק להראות ש- $\{u_n\}$ היא סדרת קושי בנורמת $\|\cdot\|_\infty$. יהי $\varepsilon > 0$.

$\hat{u} \in L^1$ (הסבר בדומה לשאלה הבאה) לכן קיים N כך שלכל $m \geq N$ מתקיים $\int_{|\omega| \geq m} |\hat{u}(\omega)|d\omega < \varepsilon$.

כעת לכל $n \geq m \geq N$ מתקיים לכל $x \in \mathbb{R}$

$$|u_n(x) - u_m(x)| = \left|\int_{-n}^{n}\hat{u}(\omega)e^{iwx}d\omega - \int_{-m}^{m}\hat{u}(\omega)e^{iwx}d\omega\right|$$

$$\leq \int_{m \leq |\omega| \leq n} |\hat{u}(\omega)||e^{iwx}|d\omega \leq \int_{|\omega| \geq m} |\hat{u}|d\omega < \varepsilon$$

לכן לכל $n \geq m \geq N$ מתקיים $\|u_n - u_m\|_\infty < \varepsilon$.

כלומר מתקיים לכל $\varepsilon > 0$ לכן $\{u_n\}$ קושי.

הערה: כעת נסביר מדוע $\hat{u}\in L^1$.

$u\in D$ לכן גם $u'\in D$ וגם $u''\in D$.

בפרט $u''\in L^1_{pc}$.

לפי נוסחאת הגזירה

$$\widehat{u''}(\omega)=-\omega^2\,\hat{u}(\omega)$$

לפי משפט $\lim\limits_{|\omega|\to\infty}\widehat{u''}(\omega)=0$

לכן $\lim\limits_{|\omega|\to\infty}\omega^2\,\hat{u}(\omega)=0$

מכאן ש- $\hat{u}\in L^1$.

ב) מה שצריך להראות זה שלכל $u\in D$

$$\int_{-\infty}^{\infty} g_n(x)\,u(x)\,dx \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\,u(x)\,dx$$

ואכן:

$$\int_{-\infty}^{\infty} g_n(x)\,u(x)\,dx=\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-n}^{n}\hat{g}(\omega)\,e^{i\omega x}\,d\omega\right)u(x)\,dx \;=$$

הפונקציה $\hat{g}(\omega)e^{i\omega x}u(x)$ אינטגרבילית

בתחום $\left\{(x,\omega)\;\middle|\; \begin{matrix} x\in(-\infty,\infty)\\ \omega\in(-n,n)\end{matrix}\right\}$

לכן מותר להחליף סדר אינטגרציה.

$$=\int_{-n}^{n}\left(\int_{-\infty}^{\infty}u(x)\,e^{i\omega x}\,dx\right)\hat{g}(\omega)\,d\omega=$$

$$=2\pi\int_{-n}^{n}\hat{u}(-\omega)\,\hat{g}(\omega)\,d\omega$$

את הביטוי האחרון נוכל לרשום

$$\frac{2\pi}{2\pi}\int_{-n}^{n}\hat{u}(-\omega)\int_{-\infty}^{\infty}g(x)e^{-i\omega x}\,dx\,d\omega$$

שוב, מותר להחליף סדר אינטגרלים (מאותה סיבה)

לכן נקבל בסופו של דבר

$$\int_{-\infty}^{\infty}g_n(x)u(x)\,dx=\int_{-\infty}^{\infty}g(x)\left(\int_{-n}^{n}\hat{u}(-\omega)e^{-i\omega x}\,d\omega\right)dx$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}g(x)u_n(x)\,dx$$

לכן מה שצריך להוכיח זה

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}g(x)u_n(x)\,dx=\int_{-\infty}^{\infty}g(x)u(x)\,dx$$

הרעיון הוא להשתמש בכך ש- $u_n\to u$ במ"ש

ובכך ש- $g\in L^1$.

__הפרטים:__ יהי $\varepsilon>0$. נמצא M כך ש-

$$\|u-u_n\|<\varepsilon/\|g\|_1$$

לכל $n\geq M$.

יש כזה M כי $u_n\to u$ במ"ש.

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty}gu_n\,dx-\int_{-\infty}^{\infty}gu\,dx\right|\leq\int_{-\infty}^{\infty}|g||u_n-u|\,dx\leq\|u-u_n\|_\infty\|g\|_1<\varepsilon$$

לכל $n\geq M$. מ.ש.ל.

שאלה 2

א.

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\sum_{j=0}^{n-1}\int_{c_j}^{c_{j+1}} f(x)\sin nx\,dx$$

לכן מספיק להראות ש-

$$\int_{c_j}^{c_{j+1}} \sin nx\,dx = 0$$ לכל j.

א/ לכל

$$\int_{c_j}^{c_{j+1}} \sin nx\,dx = \int_{-\pi+j\frac{2\pi}{n}}^{-\pi+(j+1)\frac{2\pi}{n}} \sin nx\,dx$$

$$= \int_{0}^{2\pi/n} \sin nx\,dx = \frac{1}{n}\int_{0}^{2\pi} \sin z\,dz = 0$$

$\sin nx$ מחזורית עם מחזור $\frac{2\pi}{n}$

מ.ש.ל.

ב. משפט הערך הממוצע:

תהי f רציפה בקטע $[a,b]$, וגזירה בקטע הפתוח (a,b). קיים $d\in(a,b)$ כך ש-

$$f'(d) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

(המשך ב׳)

לפי סעיף א׳

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx = \frac{1}{\pi}\sum_{j=0}^{n-1}\int_{c_j}^{c_{j+1}} (f(x)-f(c_j))\sin nx\,dx$$

לכן

$$(*) \quad |b_n| \le \frac{1}{\pi}\sum_{j=0}^{n-1}\int_{c_j}^{c_{j+1}} |f(x)-f(c_j)|\,|\sin nx|\,dx$$

נפעל בכל מחובר בנפרד, ובסוף נחזור ל-(*).

לכל j ולכל $x\in(c_j,c_{j+1})$ קיים $d_j(x)$

כך ש-

$$f(x)-f(c_j) = f'(d_j(x))(x-c_j)$$

כאן השתמשנו במשפט הערך הממוצע.

f' רציפה ולכן חסומה. נסמן

$$K = \max_{x\in[-\pi,\pi]} |f'(x)|$$

נקבל לכל j ולכל $x\in(c_j,c_{j+1})$ את ההערכה

$$|f(x)-f(c_j)| \le K|x-c_j| \le \frac{2\pi K}{n}$$

אז השוויון (*) הופך כעת להיות

$$|b_n| \le \frac{1}{\pi}\sum_{j=0}^{n-1}\int_{c_j}^{c_{j+1}} \frac{2\pi K}{n}|\sin nx|\,dx = \frac{2K}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\int_{c_j}^{c_{j+1}}|\sin nx|\,dx$$

כעת נחשב כל אחד מהאינטגרלים

$$\int_{c_j}^{c_{j+1}} |\sin nx|\,dx$$

כיון ש- $\sin nx$ מחזורית עם מחזור $\frac{2\pi}{n}$
כל אינטגרל כזה שווה ל-

$$\int_0^{2\pi/n} |\sin nx|\,dx = \int_0^{\pi/n} \sin nx\,dx - \int_{\pi/n}^{2\pi/n} \sin nx\,dx$$

הסיבה לכך היא ש- $\sin nx \geq 0$ בקטע $[0, \pi/n]$
ו- $\sin nx \leq 0$ בקטע $[\pi/n, 2\pi/n]$.

$$\int_0^{2\pi/n} \sin nx\,dx = \int_0^{\pi/n} \sin nx\,dx - \int_{\pi/n}^{2\pi/n} \sin nx\,dx =$$

$$= -\frac{\cos nx}{n}\Big|_0^{\pi/n} + \frac{\cos nx}{n}\Big|_{\pi/n}^{2\pi/n}$$

$$= \frac{+4}{n}$$

לסיכום נקבל מ-(*) את אי השוויון

$$|b_n| \leq \frac{2K}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\int_{c_j}^{c_{j+1}} |\sin nx|\,dx \leq \frac{2K}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\frac{4}{n} = \frac{8K}{n}$$

(= בעצם)

מ.ש.ל.

2) כן, אותו שיקול יעבוד גם עם $\cos nx$.

3) הדוגמא היא $f(x) = x$.

טור הפורייה שלו ע"י:

$$b_n = \frac{2(-1)^{n+1}}{n}$$

ולא מקיים $\lim_{n\to\infty} n b_n = 0$.

שאלה 3:

לפי אי שוויון בסל, סדרת מקדמי פורייה של פונקציה רציפה למקוטעין חייבת להיות כזו שסכום הריבועים שלה סופי.

הסדרות $\{b_k\}$ (הנתונה ע"י $b_k=|k|^2$)

ו- $\{d_k\}$ (הנתונה ע"י $d_k=|k|^{-0.5}$)

שתיהן מקיימות $\sum |d_k|^2 = \sum |b_k|^2 = \infty$

ולכן אינן סדרות מקדמי פורייה של פונקציה רציפה למקוטעין.

לכן ג' וד' מתאימים ל- (iv).

א) נתבונן בטור

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{ikx} = \sum_{k\neq 0} 2^{-|k|} e^{ikx}$$

לפי מבחן M של ויירשטראס הטור מתכנס בהחלט ובמידה שווה.

כיוון שהסכומים החלקיים רציפים ומחזוריים, הפונקציה הגבולית $f(x)$ היא רציפה ומחזורית.

אם נגזור את הטור איבר איבר נקבל

$$\sum_{k\neq 0} 2^{-|k|} ik\, e^{ikx}$$

כיוון שהטור $\sum_{k\neq 0} 2^{-|k|} ik$ מתכנס בהחלט (לפי מבחן המנה, למשל)

וכיון $\left|2^{-|k|}ke^{ikx}\right| \le 2^{-|k|}|k| =: e$

נקבל שהטור הנגזר איבר איבר מתכנס במ"ש.
(שוב לפי מבחן M של ויירשטראס).
לפי משפט בחדו"א הטור הנגזר מתכנס
לנגזרת

$$f'(x) = \sum_{k\neq 0} 2^{-|k|} ik e^{ikx}.$$

לכן $f'(x)$ רציפה ומחזורית.
גזירה נוספת איבר איבר ושימוש באותם שיקולים מראה שגם $f''(x)$ רציפה ומחזורית.
ראינו כבר ש-

$$f(x) = \sum_{k\neq 0} 2^{-|k|} e^{ikx}.$$

כיון שטור פורייה הוא יחידי.
הסדרה $\{a_k\}$ היא סדרת מקדמי הפורייה של f.
לכן ג מתאים ל-(i).
ב) סעיף ב' מתאים ל-(ii).
כמו בסעיף ג נגדיר

$$g(x) = \sum_{k\neq 0} |k|^{-2.5} e^{ikx}$$

$\sum_{|k|\neq 0} |k|^{-2.5} < \infty$ ולכן הטור מתכנס במ"ש ל-$g(x)$ ו-$g(x)$ רציפה, וגם מחזורית!

כמו בסעיף א',

$$g'(x) = \sum ik|k|^{-2.5}e^{ikx}$$

והרי ההתכנסות היא במ"ש.

לכן או (i) או (ii) מתקיימים.

נראה ש-(i) לא מתקיים.

אילו (i) היה מתקיים, אז לפי משפט היה ניתן לגזור את הטור של g' איבר איבר ולקבל את הטור של g''.

אבל גזירה איבר איבר נותנת מקדמים

$$-k^2|k|^{-2.5}$$

ואלו אינם מקדמי פוריה של פונקציה רציפה למקרו עין (כי זה כמו ג').

מ.ש.ל.

שאלה 4:

א) לפי ל3 הנוסחאות

$$\mathcal{F}[e^{-|x|}](\omega) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{\omega^2+1}$$

ל1 כ:

$$\mathcal{F}[e^{-a|x|}](\omega) = \frac{1}{a}\mathcal{F}[e^{-|x|}]\left(\frac{\omega}{a}\right) = \frac{1}{\pi}\frac{a}{\omega^2+a^2}$$

$$\mathcal{F}\left[\frac{d}{dx}\frac{\pi}{a}e^{-a|x|}\right] = \frac{i\omega}{\omega^2+a^2}$$

כמו כן:

$$\frac{d}{dx}\frac{\pi}{a}e^{-a|x|} = \begin{cases} -\pi e^{-ax}, & x>0 \\ \pi e^{ax}, & x<0 \end{cases}$$

$$= -\pi\,\mathrm{sign}(x)\,e^{-a|x|}$$

כל הפונקציות $\to L^2_{pc}$, לכן נשתמש בפרסבל:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\omega^2}{(\omega^2+a^2)(\omega^2+b^2)}d\omega = \int_{-\infty}^{\infty}\mathcal{F}[-\pi\,\mathrm{sign}(x)e^{-a|x|}]\,\overline{\mathcal{F}[-\pi\,\mathrm{sign}(x)e^{-b|x|}]}\,d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\pi^2 e^{-a|x|}e^{-b|x|}dx = \pi\int_0^{\infty}e^{-(a+b)x}dx = \frac{\pi}{a+b}$$

מ.ש.ל.

ב

$$F\left[e^{-a|x|}\right](\omega) = \frac{1}{\pi}\,\frac{a}{\omega^2+a^2}$$

לכן לפי נוסחאת ההיפוך

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\pi}\,\frac{a}{\omega^2+a^2}\,e^{i\omega x}\,d\omega = e^{-a|x|}$$

החלפת משתנים $t=-\omega$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{a}{t^2+a^2}\,e^{-ixt}\,dt = e^{-a|x|}$$

כלומר: $e^{-a|\omega|} = F\left[\frac{2a}{x^2+a^2}\right](\omega)$

(אחרי שמחליפים את $\omega \to x$ ואת $x \to t$.)

נסמן $f_a(x) = \dfrac{a}{x^2+a^2}$

בגלל אלו את בקשים לחשב:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{ab}{((x-y)^2+a^2)(y^2+b^2)}\,dy = f_a * f_b(x)$$

לפי נוסחאת הקונבולוציה

$$F[f_a * f_b] = 2\pi F[f_a]\,F[f_b] = \frac{\pi}{2}e^{-(a+b)|\omega|}$$

ולכן:

$$f_a * f_b = F^{-1}\left[\frac{\pi}{2}e^{-(a+b)|\omega|}\right] = \frac{\pi(a+b)}{x^2+(a+b)^2}$$

מ.ש.ל.

(d

$$F(z) = \frac{z+1}{z^2+1}$$

התמרת לפלס הפוכה:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{A\to\infty} \int_{s-iA}^{s+iA} e^{zt} F(z)\, dz$$

לכל $0<t$, כאשר $0<s$ כלשהו.
(לוקחים $0<s$ כי $F(z)$ אנליטית בחצי המישור מימין ל- 0).
לפי הנוסחא של שימוש במשפט השארית לחישוב התמרה הפוכה (המצוי בדף הנוסחאות)

$$f(t) = \mathrm{Res}\left(i, \frac{z+1}{z^2+1} e^{zt}\right) + \mathrm{Res}\left(-i, \frac{z+1}{z^2+1} e^{zt}\right)$$

i ו- $-i$ הינם קטבים פשוטים של $F(z)$.

$$\mathrm{Res}\left(i, \frac{z+1}{z^2+1} e^{zt}\right) = \frac{(z-i)(z+1)}{(z^2+1)} e^{zt}\Big|_{z=i}$$

$$= \frac{(z-i)(z+1)}{(z-i)(z+i)} e^{zt}\Big|_{z=i} =$$

$$= \frac{i+1}{2i} e^{it}$$

$$\mathrm{Res}\left(-i, \frac{z+1}{z^2+1} e^{zt}\right) = \frac{(z+i)(z+1)}{(z^2+1)} e^{zt}\Big|_{z=-i}$$

$$= -\frac{-i+1}{2i} e^{-it}$$

$$f(t) = \frac{1}{2}\left(e^{it} + e^{-it}\right) + \frac{1}{2i}\left(e^{it} - e^{-it}\right) = \underline{\underline{\cos t + \sin t}}$$