

מבחן באנליזת פורייה להנדסת חשמל
0041 – 1 – 201, תשע"ג

ד"ר נדיה גורביץ', פרופ' ויקטור ויניקוב

10.02.2013

משך הבחינה 3 שעות. פתור את כל השאלות. אין כל חומר עזר. הציון המקסימלי הוא 70.
נא לכתוב פתרונות מלאים ומנומקים היטב

1. יהי V מרחב הפונקציות הרציפות למקוטעין בקטע $[-\pi, \pi]$ עם מכפלה פנימית סטנדרטית. מצא את הקירוב המיטבי של $e^{i(n+1)x}$ בתת מרחב W כאשר:

(א) (10 נק')

$$W = \text{Span}\{e^{ikx}, -n \leq k \leq n\}$$

(ב) (10 נק') מרחב של כל הפונקציות הזוגיות ב V .

2. א) (נק' 20) תהינה $f_n, f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציות רציפות למקוטעין עם טורי פורייה

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_{nk} e^{ikx}, \quad \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}$$

בהתאמה.

נניח כי $f_n \rightarrow f$ לפי נורמה $\|\cdot\|_2$. הוכח כי $\lim_{n \rightarrow \infty} c_{nk} = c_k$ לכל k .

3. א) (10 נק') חשב את טרנספורם פוריה של $e^{-|x|} + |x|e^{-|x|}$
ב) (10 נק') פתור את המשוואה האינטגרלית:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x-t|} f(t) dt = e^{-|x|} + |x|e^{-|x|}$$

4. א (10 נק') נגדיר סידרת הפונקציות:

$$Q_n(x) = \begin{cases} 3n^2x + 2n & -\frac{2}{3n} \leq x \leq 0 \\ -6n^2x + 2n & 0 \leq x \leq \frac{1}{3n} \\ 0 & x \notin [-\frac{2}{3n}, \frac{1}{3n}] \end{cases}$$

הוכח כי $\lim_{n \rightarrow \infty} Q_n = \delta$ בהתכנסות החלשה (התכנסות הדיסטריוציות).

ב (10 נק') תהיה $f: R \rightarrow C$ פונקציה רציפה למקוטעין (לאו דווקא גזירה).

הוכח כי סידרת הפונקציות המוכללות (דיסטריוציות) $\frac{f(x+1/n)-f(x)}{1/n}$ מתכנסת חלש לנגזרת (במובן של דיסטריוציות) של פונקציה מוכללת f .

בהצלחה!