

מבחן באנליזת פורייה להנדסת חשמל
0041 – 1 – 201, תשע"ג

ד"ר נדיה גורביץ', פרופ' ויקטור ויניקוב

15.03.2013

משך הבחינה 3 שעות. פתור את כל השאלות. אין כל חומר עזר. הציון המקסימלי הוא 70.
נא לכתוב פתרונות מלאים ומנומקים היטב

1. יהי V מרחב הפונקציות הגזירות ברציפות למקוטעין בקטע $[-\pi, \pi]$. נגדיר על V מכפלה פנימית.

$$(f, g) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\overline{g(t)} dt + \int_{-\pi}^{\pi} f'(t)\overline{g'(t)} dt$$

אין צורך להוכיח כי זאת מכפלה פנימית.

(א) (10 נק') הוכח כי $\{e^{inx}\}_{n=-\infty}^{\infty}$ מהווה מערכת אורתוגונלית. מצא נורמה של e^{inx} המושרית מהמכפלה הפנימית הנ"ל.

(ב) (10 נק') הוכח כי לא קיימת פונקציה f ב V המקיימת

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \cdot \left| \int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - in \cdot f'(x)) e^{-inx} dx \right|^2}{1 + n^2} = 1$$

2. תהי $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה רציפה למקוטעין המתאפסת מחוץ לקטע סופי. נניח
כי $\int_{-\infty}^{\infty} g(t) dt = 0$.

(א) (נק' 10) הוכח כי $\tilde{g}(x) = \int_{-\infty}^x g(t) dt$ גם מתאפסת מחוץ לקטע סופי.

(ב) (נק' 10) חשב את הטרנספורם פורייה של \tilde{g} במונחים של הטרנספורם פורייה של g .

3. א) (10 נק') מצא את הטור פורייה המרוכב של הפונקציה $g(x) = |x|$ בקטע $[-\pi, \pi]$.

ב) (10 נק') נרחיב את g לפונקציה מחזורית עם מחזור 2π על כל הציר הממשי. מצא פונקציה f רציפה למקוטעין ומחזורית עם מחזור 2π המקיימת

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(x-t)dt = 1 + e^{ix} + e^{2ix}$$

4. א) (10 נק') נתונה פונקציה $f : R \rightarrow R$ המוגדרת ע"י:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & (2k-1)\pi \leq x \leq 2k\pi \\ 0 & 2k\pi < x < (2k+1)\pi \end{cases}$$

לכל k שלם.

מצא את f' במובן הדיסטריבוציות והראה כי היא מחזורית עם מחזור 2π .
ב) (10 נק') מצא טור פורייה של f ושל f' בקטע $[-\pi, \pi]$ במובן הדיסטריבוציות.

בהצלחה!