פיתרון למועד א' – אנליזת פוריה לחשמל

שימו לב במיוחד לשאלות 1 ב' ו- 4 ב' שאינן טריוויאליות בכלל (ואכן הן נבדקו בסלחנות רבה).

<u>שאלה 1</u>: יהי $V = L^2_{pc}[-\pi,\pi]$. מצא קירוב מיטבי של $e^{i(n+1)x}$ ב- W כאשר:

א. $W = \text{span}\{e^{ikx}: -n \le k \le n\}$.
ב. W הוא מרחב הפונקציות הזוגיות ב- V.

<u>פיתרון א': דרך ראשונה</u>:

מהאורטונורמליות של המערכת הטריגונומטרית המרוכבת נקבל כי:

$$\left(e^{i(n+1)x} - \vec{0}\right) = e^{i(n+1)x} \perp W$$

ולכן $\vec{0}$ הוא ההיטל האורתוגונאלי של $e^{i(n+1)x}$ על W ולכן גם קירוב מיטבי שלו ב- W.

<u>דרך שניה</u>: W הוא תת מרחב ממימד סופי ו- $B = \left\{\frac{e^{ikx}}{\sqrt{2\pi}}\right\}_{k=-n}^{n}$ הוא בסיס אורתונורמלי שלו. לכן, לפי משפט שלמדנו, הקירוב המיטבי של $e^{i(n+1)x}$ ב- W נתון ע"י:

$$\sum_{k=-n}^{n} < e^{i(n+1)x}, \frac{e^{ikx}}{\sqrt{2\pi}} > \frac{e^{ikx}}{\sqrt{2\pi}} = \vec{0}$$

שכן כל המכפלות הפנימיות מתאפסות מהאורתוגונאליות של המערכת הטריגונומרית.

<u>פיתרון ב'</u>: <u>דרך ראשונה</u>:

<u>טענת עזר</u>: לכל $f \in V$, מתקיים כי החלק הזוגי של f: $\frac{f(x)+f(-x)}{2}$ הוא ההיטל האורתוגונאלי של f על מרחב הפונקציות הזוגיות ולכן גם קירוב מיטבי של f שם.

<u>הוכחת טענת העזר</u>: תהי g זוגית, אזי:

$$< f(x) - \frac{f(x)+f(-x)}{2}, g > = < \frac{f(x)-f(-x)}{2}, g > = 0$$

כי הביטוי האחרון הוא אינטגרל של זוגית כפול אי זוגית על תחום סימטרי.

<u>פיתרון התרגיל</u>: לפי טענת העזר הקירוב המיטבי הוא החלק הזוגי:

$$\frac{e^{i(n+1)x} + e^{-i(n+1)x}}{2} = \cos(n+1)x$$

<u>דרך שניה</u>:

<u>טענת עזר</u>: אם V ממ"פ, $W \subset V$ תת מרחב, $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ מערכת אורתונורמלית של וקטורים ב- W שסגורה ב- W ו- $u \in V$, אזי אם הטור הבא:

$$(*)\sum_{k=1}^{\infty} < u, e_k > e_k$$

מתכנס ב- V, אזי סכומו הוא ההיטל האורתוגונאלי של u על W.

<u>הוכחה של טענת העזר</u>: יהי $v \in W$, נראה כי $v \perp (u - \sum_{k=1}^{\infty} < u, e_k > e_k)$. מהנתון, $\{e_k\}$ מערכת סגורה ב- W ולכן:

$$v = \sum_{j=1}^{\infty} < v, e_j > e_j$$

כעת, אם הטור $(*)$ מתכנס, נקבל מהרציפות של המכפלה הפנימית: (ניתן להוציא ולהכניס סכומים אינסופיים מהמכפלה הפנימית):

$$< u - \sum_{k=1}^{\infty} < u, e_k > e_k\, , v > = < u - \sum_{k=1}^{\infty} < u, e_k > e_k\, , \sum_{j=1}^{\infty} < v, e_j > e_j >$$

$$= < u, \sum_{j=1}^{\infty} < v, e_j > e_j > - < \sum_{k=1}^{\infty} < u, e_k > e_k\, , \sum_{j=1}^{\infty} < v, e_j > e_j >$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} < v, e_j >, < u, e_j > - \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} < u, e_k >< v, e_j > \overbrace{< e_k, e_j >}^{\delta_{kj}}$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} < u, e_j >, < v, e_j > - \sum_{k=1}^{\infty} < u, e_k >< v, e_k > = 0$$

כנדרש.

<u>פיתרון התרגיל</u>: הוכחנו בהרצאות כי המערכת האורטונורמלית: $\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right\} \cup \left\{\frac{\cos(kx)}{\sqrt{\pi}}\right\}_{k=1}^{\infty}$ היא מערכת של פונקציות זוגיות שסגורה במרחב הפונקציות הזוגיות ב- V. לכן, לפי טענת העזר, אם הטור הבא:

$$< e^{i(n+1)x}, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} > \; + \sum_{k=1}^{\infty} < e^{i(n+1)x}, \frac{\cos(kx)}{\sqrt{\pi}} > \frac{\cos(kx)}{\sqrt{\pi}}$$

מתכנס ב- V לוקטור u^*, אזי u^* הוא ההיטל האורתוגונאלי של $e^{i(n+1)x}$ על W ולכן הוא גם קירוב מיטבי שלו ב- W. אבל:

$$e^{i(n+1)x} = \cos(n+1)\, x + i \sin(n+1)x$$

ולכן מהאורטונורמליות של המערכת הטריגונומטרית הממשית נקבל כי הטור מתכנס ל-

$$\mathrm{u}^* = \cos(n+1)x$$

שכן כל יתר המכפלות הפנימיות מתאפסות.

<u>הערת המחבר</u>: כמעט אף אחד לא נתן פיתרון מלא אך למרות זאת חלק נכבד מהסטודנטים שהלכו בדרך השניה קיבלו ניקוד מלא. מי שהלך בדרך הראשונה ולא נתן נימוק מלא קיבל משהו כמו 7 נקודות מתוך 10. חלק מאלה שבחרו בדרך השניה כתבו שגיאות כגון הטענה ש- $\{\cos(nx)\}$ פורשת את מרחב הפונקציות הזוגיות או מהווה בסיס, זו שגיאה נפוצה, זוהי אמנם מערכת סגורה אך לא בסיס או קבוצה פורשת (כי קומבינציות לינאריות סופיות לא מספיקות בשביל לייצר כל פונקציה זוגית – אני בטוח שמאוד איכפת לכם!), לא הורדו על כך נקודות בכל אופן.

<u>שאלה 2</u>: נניח כי $f_n \longrightarrow f$ ב- $L^2_{pc}[-\pi,\pi]$ ונסמן c_k ו- c_{nk} מקדמי פוריה ה- k של f ושל f_n בהתאמה (אין הכוונה למכפלה של n ו- k). הוכח כי $c_{nk} \xrightarrow[n\to\infty]{} c_k$ לכל k.

<u>פיתרון</u>: <u>דרך ראשונה</u>:

$$|c_{nk}-c_k| = \frac{1}{2\pi}\left|\int_{-\pi}^{\pi}\big(f_n(x)-f(x)\big)e^{-ikx}dx\right| \le \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f_n(x)-f(x)|dx$$

$$= \frac{1}{2\pi}\|f_n-f\|_1 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

כי התכנסות ב- $\|\cdot\|_2$ גוררת התכנסות ב- $\|\cdot\|_1$ בקטע סופי.

<u>דרך שניה</u>:

$$|c_{nk}-c_k| = \frac{1}{2\pi}\left|< (f_n-f), e^{ikx} >\right| \le \{\text{קושי שוורץ}\} \le \frac{1}{2\pi}\|f_n-f\|_2\left\|e^{ikx}\right\|_2 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

מהנתון.

<u>דרך שלישית</u>: מהנתון:

$$\|f_n-f\|_2 = \{\text{פרסבל}\} = 2\pi\sum_{j=-\infty}^{\infty}\left|c_{nj}-c_j\right|^2 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

אבל לכל k מתקיים כי: $|c_{nk}-c_k|^2 \le 2\pi\sum_{j=-\infty}^{\infty}\left|c_{nj}-c_j\right|^2$ ולכן לפי סנדוויץ' נקבל את התוצאה.

<u>שאלה 3 א'</u>: חשב טרנספורם פוריה של:

$$e^{-|x|} + |x|e^{-|x|}$$

<u>פתרון</u>:

$$\mathcal{F}\left(e^{-|x|}\right)(\omega) = \frac{1}{\pi(1+\omega^2)}$$

$$\mathcal{F}\left(|x|e^{-|x|}\right)(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{0}-xe^{x}e^{-i\omega x}dx+\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\infty}xe^{-x}e^{-i\omega x}dx$$

$$\int_{-\infty}^{0}xe^{x}e^{-i\omega x}dx=\int_{-\infty}^{0}xe^{x(1-i\omega)}dx=\frac{1}{1-i\omega}\int_{-\infty}^{0}xde^{x(1-i\omega)}=$$

$$=\frac{1}{1-i\omega}\left(\left(xe^{x(1-i\omega)}\right)_{-\infty}^{0}-\int_{-\infty}^{0}e^{x(1-i\omega)}dx\right)=\frac{1}{1-i\omega}\left(0-\left(\frac{1}{1-i\omega}\right)e^{x(1-i\omega)}\right)_{-\infty}^{0}=$$

$$=-\left(\frac{1}{1-i\omega}\right)^{2}\Longrightarrow\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{0}-xe^{x}e^{-i\omega x}dx=\frac{1}{2\pi}\frac{1}{(1-i\omega)^{2}}$$

באופן דומה ניתן להראות כי:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\infty}xe^{-x}e^{-i\omega x}dx=\frac{1}{2\pi}\frac{1}{(1+i\omega)^{2}}$$

$$\Longrightarrow\mathcal{F}\left(e^{-|x|}+|x|e^{-|x|}\right)(\omega)=\frac{1}{\pi(1+\omega^{2})}+\frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{(1-i\omega)^{2}}+\frac{1}{(1+i\omega)^{2}}\right)=$$

$$=\frac{2}{\pi(\omega^{2}+1)^{2}}$$

<u>שאלה 3 ב'</u>: פתור את המשוואה האינטגרלית:

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-|x-t|}f(t)dt=e^{-|x|}+|x|e^{-|x|}$$

<u>פיתרון</u>: אגף שמאל הוא הקונבולוציה של הפונקציות f ו- $e^{-|x|}$, נפעיל התמרת פוריה על שני האגפים, באגף ימין נקבל את מה שחישבנו בסעיף א', באגף שמאל נקבל לפי משפט הקונבולוציה:

$$\frac{2\pi\hat{f}(\omega)}{\pi(1+\omega^{2})}=\frac{2\hat{f}(\omega)}{1+\omega^{2}}\Longrightarrow\hat{f}(\omega)=\frac{1}{\pi(1+\omega^{2})}$$

אך זוהי התמרת פוריה של הפונקציה:

$$f(x)=e^{-|x|}$$

ולכן זהו הפיתרון.

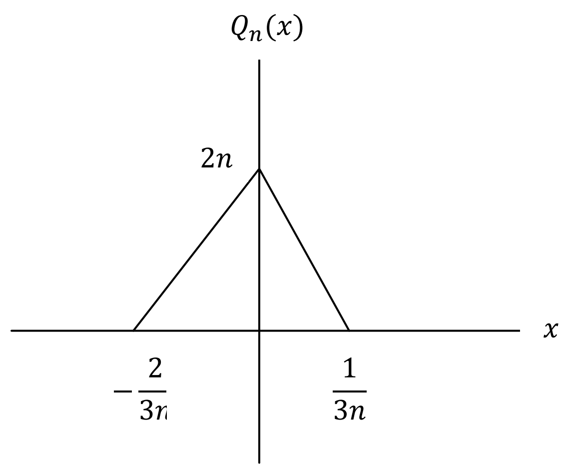
<u>הערה</u>: מכיוון שהשתמשנו במשפט הקונבולוציה, הפיתרון שחיפשנו צריך לקיים את התנאים לשימוש במשפט הקונבולוציה. אחת הגרסאות של משפט הקונבולוציה היא על שתי פונקציות ב- $L^1_{pc}(\mathbb{R})$ והפיתרון שמצאנו אכן שייך ל- $L^1_{pc}(\mathbb{R})$ כנדרש.

<u>שאלה 4 א'</u>: נסמן:

$$Q_n(x)=\begin{cases}3n^2x+2n, & -\frac{2}{3n}\le x\le 0\\ -6n^2x+2n, & 0\le x\le \frac{1}{3n}\\ 0, & \text{אחרת}\end{cases}$$

הוכח כי $Q_n(x)\xrightarrow[n\to\infty]{}\delta$ במובן של דיסטריבוציות.

<u>פיתרון</u>: <u>דרך א'</u>: בעזרת קירוב יחידה. נראה כי $Q_n(x)$ קירוב יחידה על הישר:



ברור כי $Q_n(x)\ge 0$ לכל n ולכל x ו-

$$\int_{-\infty}^{\infty}Q_n(x)dx=\text{שטח המשולש}=2n\cdot\left(\frac{1}{3n}+\frac{2}{3n}\right)\cdot\frac{1}{2}=1$$

כמו כן, אם $\delta>0$ קיים n_0 כך ש- $\frac{1}{3n_0}<\delta$ ואז לכל $n>n_0$ מתקיים כי: $Q_n(x)=0\xrightarrow[n\to\infty]{}0$ במ"ש על $(\mathbb{R}-(-\delta,\delta))$. לכן, $Q_n(x)$ קירוב יחידה וקל לראות כי גם $R_n(x)\coloneqq Q_n(-x)$ הוא קירוב יחידה (כי הוא שיקוף) ולכן לפי המשפט על קירובי יחידה שלמדנו בכתה מתקיים כי לכל פונקצית מבחן u:

$$L_{Q_n}(u)=\int_{-\infty}^{\infty}Q_n(x)\cdot u(x)dx=\int_{-\infty}^{\infty}R_n(-x)\cdot u(x)dx=R_n*u(0)\xrightarrow[n\to\infty]{}u(0)=L_\delta(u)$$

כנדרש.

<u>דרך ב'</u>: ישירות. תהי $u\in D$ פונקצית מבחן. אזי:

$$L_{Q_n}(u)=\int_{-\infty}^{\infty}Q_n(x)\cdot u(x)dx=\int_{-\frac{2}{3n}}^{0}(3n^2x+2n)u(x)dx+\int_{0}^{\frac{1}{3n}}(-6n^2x+2n)u(x)dx$$

נחשב את הגבול של האינטגרל הראשון (החישוב השני דומה). נסמן $U(x)$ קדומה של $u(x)$ ו- $F(x)$ קדומה של $xu(x)$, כלומר:

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} tu(t)dt\,,\qquad U(x)=\int_{-\infty}^{x} u(t)dt$$

אזי מכיון ש- $xu(x),u(x)$ הן פונקציות מבחן מתקיים כי F,U גזירות ו- $F'(x)=xu(x)$, $U'(x)=u(x)$ ולכן:

$$\int_{-\frac{2}{3n}}^{0}(3n^2x+2n)u(x)dx=3n^2\left(F(0)-F\left(-\frac{2}{3n}\right)\right)+2n\left(U(0)-U\left(-\frac{2}{3n}\right)\right)=$$

$$=\left\{n=\frac{1}{h}\right\}=\frac{3\left(F(0)-F\left(-\frac{2}{3}h\right)\right)}{h^2}+\frac{2\left(U(0)-U\left(-\frac{2}{3}h\right)\right)}{h}$$

$$\xrightarrow[h\to 0]{}\lim_{h\to 0}\left(\frac{3\left(\frac{2}{3}F'\left(-\frac{2}{3}h\right)\right)}{2h}+\frac{2\left(\frac{2}{3}U'\left(-\frac{2}{3}h\right)\right)}{1}\right)=\lim_{h\to 0}\left(\frac{F'\left(-\frac{2}{3}h\right)}{h}+\frac{4}{3}U'\left(-\frac{2}{3}h\right)\right)=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\left(-\frac{2}{3}\right)F''\left(-\frac{2}{3}h\right)}{1}+\frac{4}{3}u(0)=-\frac{2}{3}F''(0)+\frac{4}{3}u(0)$$

$$=-\frac{2}{3}\big(u(x)+xu'(x)\big)|_{x=0}+\frac{4}{3}u(0)=\frac{2}{3}u(0)$$

באופן דומה מראים כי האינטגרל השני מתכנס ל- $\frac{1}{3}u(0)$ וזה מסיים את ההוכחה (עד כדי טעות חישוב ☺).

<u>שאלה 4 ב'</u>: תהי f רציפה למקוטעין (לאו דווקא גזירה!) על $\mathbb{R}$, הראה כי $\frac{f\left(x+\frac{1}{n}\right)-f(x)}{\frac{1}{n}}\xrightarrow[n\to\infty]{}f'(x)$ במובן של דיסטריבוציות.

<u>טענת עזר</u>: לכל פונקצית מבחן u מתקיים כי:

$$\frac{u\left(x+\frac{1}{n}\right)-u(x)}{\frac{1}{n}}\xrightarrow[n\to\infty]{}u'(x)$$

במ"ש על $\mathbb{R}$.

<u>הוכחה</u>: נסמן $u_n(x)=\frac{u\left(x+\frac{1}{n}\right)-u(x)}{\frac{1}{n}}$. מכיון ש- u גזירה, לפי משפט לגרנז', מתקיים: $(*)$ לכל n ולכל x יש $c_n(x)$ כך ש- $|c_n(x)-x|<\frac{1}{n}$ ו- $u_n(x)=u'\big(c_n(x)\big)$. מכיון ש- u' רציפה ונתמכת בקטע סופי סגור I, היא רציפה שם במ"ש ולכן היא גם רציפה במ"ש על $\mathbb{R}$.

אם כן, יהי $\epsilon > 0$, צ"ל כי קיים n_0 כך שלכל $n > n_0$ מתקיים $|u_n(x) - u'(x)| < \epsilon$ לכל $x \in \mathbb{R}$.
מהרציפות במ"ש של u', יש $\delta > 0$ כך שאם $|x - y| < \delta$ אז $|u'(x) - u'(y)| < \epsilon$. לפי $(*)$, יש n_0 כך שלכל $n > n_0$ ולכל x, $|c_n(x) - x| < \frac{1}{n} < \frac{1}{n_0} < \delta$ ו- $u_n(x) = u'\big(c_n(x)\big)$ ולכן לכל $n > n_0$:

$$|u_n(x) - u'(x)| = \left|u'\big(c_n(x)\big) - u'(x)\right| < \left\{\text{רציפות במידה שווה}\,, |c_n(x) - x| < \delta\right\} < \epsilon$$

כפי שרצינו.

<u>פיתרון</u>: יהי $u \in D$ הנתמך בקטע הקומפקטי $[a, b]$, אזי:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x)}{\frac{1}{n}} u(x)dx = n\int_{-\infty}^{\infty} f\left(x + \frac{1}{n}\right) u(x)dx - n\int_{-\infty}^{\infty} f(x)u(x)dx$$

$$= \left\{\text{החלפת משתנה}\right\} = n\int_{-\infty}^{\infty} f(t)u\left(t - \frac{1}{n}\right)dt - n\int_{-\infty}^{\infty} f(x)u(x)dx$$

$$= \int_a^b f(x)\frac{u\left(x - \frac{1}{n}\right) - u(x)}{\frac{1}{n}}dx \;\overbrace{\xrightarrow[n\to\infty]{}}^{\text{לפי טענת העזר}}\; \int_a^b f(x)\cdot\big(-u'(x)\big)dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cdot\big(-u'(x)\big)dx$$

וזוהי בדיוק הגדרת הנגזרת הדיסטריבוטיבית של f.