

הוכחה כי $\mathbb{Q}(\sqrt{-6})$ הוא שדה

הוכחה כי $\mathbb{Q}(\sqrt{-6})$ הוא שדה

$$0 = 0 + 0\sqrt{-6} \in A \quad : 0 \in A \quad 1$$

$0 \in \mathbb{Q}$ כי

$$1 = 1 + 0 \cdot \sqrt{-6} \in A \quad : 1 \in A \quad 2$$

$1, 0 \in \mathbb{Q}$ כי

3. A הוא תת-בנייה של \mathbb{Q}

$$x = a + b\sqrt{-6}, y = c + d\sqrt{-6} \in A$$

כאשר $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$

$$x + y = (a + c) + (b + d)\sqrt{-6} \in A$$

כי $a + c, b + d \in \mathbb{Q}$ (כי \mathbb{Q} סגור)

4. A סגור מכפלה: $x, y \in A$

$$xy = (ac - 6bd) + (ad + bc)\sqrt{-6} \in A$$

כי $ac - 6bd, ad + bc \in \mathbb{Q}$ (כי \mathbb{Q} סגור)

5. A סגור לגבי השלילה

$$x = a + b\sqrt{-6} \in A$$

כאשר $a, b \in \mathbb{Q}$

$$-x = (-a) + (-b)\sqrt{-6} \in A$$

כי $-a, -b \in \mathbb{Q}$ (כי \mathbb{Q} סגור)

$x \neq 0$, $\Rightarrow x \in \mathbb{A}$ \Rightarrow $x^{-1} \in \mathbb{A}$ \Rightarrow $x^{-1} \in \mathbb{A}$ \Rightarrow $x^{-1} \in \mathbb{A}$

$$x^{-1} = \frac{a - b\sqrt{-6}}{(a + b\sqrt{-6})(a - b\sqrt{-6})} = \frac{a}{a^2 + 6b^2} - \frac{b}{a^2 + 6b^2} \sqrt{-6}$$

$\in \mathbb{A}$

$a^2 + 6b^2 \neq 0 \Rightarrow a, b \in \mathbb{Q} \Rightarrow \frac{a}{a^2 + 6b^2} - \frac{b}{a^2 + 6b^2} \sqrt{-6} \in \mathbb{Q} \Rightarrow$

פרט לר פרימ פירום $a, b \Rightarrow a^2 + 6b^2 > 0$ \Rightarrow $x \neq 0 \Rightarrow x^{-1} \in \mathbb{A}$

2.2.11

$$w = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}$$

$$|w| = \left(\frac{1}{4} + \frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{2}} = 1 \quad \text{פרט}$$

\Rightarrow $\text{arg } w = \arctan \frac{\sqrt{3}/2}{1/2} = \arctan \sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$

פרט אבסורד של $z^3 = w$ \Rightarrow $z^3 = w$

$$\text{arg } z = \frac{\text{arg } w}{3} + \frac{2\pi k}{3} \quad |z| = |w|^{\frac{1}{3}} = 1 \quad \text{פרט פרט}$$

$$k = 0, 1, 2$$

$$z = \cos \frac{\pi}{9} + i \sin \frac{\pi}{9} \quad (k=0)$$

$$z = \cos \frac{7\pi}{9} + i \sin \frac{7\pi}{9} \quad (k=1)$$

$$z = \cos \frac{13\pi}{9} + i \sin \frac{13\pi}{9} \quad (k=2)$$

א"ב א"ב

$$\left(\begin{array}{cc|c} a & 1 & 4a \\ a & a^2 & 1 \\ a & 1 & a^3 \end{array} \right)$$

$\xrightarrow{R_2 \rightarrow R_2 - R_1}$
 $R_3 \rightarrow R_3 - R_1$

$$\left(\begin{array}{cc|c} a & 1 & 4a \\ 0 & a^2 - 1 & 1 - 4a \\ 0 & 0 & a^3 - 4a \end{array} \right)$$

(*)

ב"ב א"ב א"ב א"ב א"ב
 פ"ב א"ב א"ב א"ב א"ב

$$a \neq 0, \quad a^2 - 1 \neq 0, \quad a^3 - 4a \neq 0$$

פ"ב $V(a) = \mathbb{C}^3$ א"ב א"ב א"ב א"ב א"ב

$$a \neq 0$$

$$a^2 - 1 \neq 0 \Rightarrow a \neq \pm 1$$

פ"ב

$$a^3 - 4a \neq 0 \Rightarrow a^2 - 4 \neq 0 \Rightarrow a \neq \pm 2$$

פ"ב

$$a \neq 0$$

א"ב א"ב א"ב א"ב

$a \neq 0, \pm 1, \pm 2$ פ"ב א"ב $V(a) = \mathbb{C}^3$ פ"ב .

$(4a, 4a, a^2) \in V(a)$ א"ב א"ב א"ב

$(4a, 4a, a^2) = 0 \in V(a)$ א"ב, $a=0$ פ"ב .

∴ (*) nlc plesst $a = \pm 1$ ∴ nll ∘

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 4a & 4a \\ 0 & 0 & 1-4a & 0 \\ 0 & 0 & a^3-4a & a^2-4a \end{array} \right)$$

→ ~~$R_2 \rightarrow R_2 - \frac{a^3-4a}{1-4a} R_1$~~

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 4a & 4a \\ 0 & 0 & 1-4a & 0 \\ 0 & 0 & \cancel{a^3-4a} & a^2-4a \end{array} \right)$$

$$R_3 \rightarrow R_3 - \frac{a^3-4a}{1-4a} R_2$$

($1-4a \neq 0$ ∴ nll nlc)

$a = \pm 1$ ∴

($a = \pm 1$ ∴) $a^2 - 4a \neq 0$

$(4a, 4a, a^2) \notin V(a) \Leftarrow$

∴ (*) nlc plesst $a = \pm 2$ ∴ nll ∘

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 4a & 4a \\ 0 & a^2-1 & 1-4a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^2-4a \end{array} \right)$$

($a = \pm 2$ ∴) $a^2 - 4a \neq 0$

$(4a, 4a, a^2) \notin V(a) \Leftarrow$

עליון פורמטור הוא בן המיליון המיליון
 : \mathbb{F}_2 בן 3x2 מוקד מיליון מיליון

$$\begin{aligned} x_1 &= 0 \\ x_2 &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1 מיליון מיליון מיליון
 מיליון מיליון מיליון

$$\begin{aligned} x_1 &= 0 \\ 0 &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1 מיליון מיליון מיליון

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 0 \\ 0 &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} x_2 &= 0 \\ 0 &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1 מיליון מיליון מיליון

$$\begin{aligned} 0 &= 0 \\ 0 &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1 מיליון מיליון