

## בוחן באלגברה 1

מס' קורס: 201.1.9641  
סמסטר א', תש"עד ; בוחן שני  
מרצים: פרופ' ג. משביצקי, פרופ' ו. ויניקוב, ד"ר נ. גולקו, ד"ר א. מצרי, ד"ר א. סייג  
תאריך הבחינה: 9.1.2015  
מיועד לתלמידי הנדסה  
משך הבחינה: שעתיים ; חומר עזר: מחשבוניס

במבחן זה שני חלקים. בחלק הראשון יש שתי שאלות. בחלק השני שתי שאלות אמריקאיות.

בהצלחה !!

טבלת ניקוד - לשימוש הבודקים

שאלה	ציון
א1	
ב1	
ג1	
א2	
ב2	
3	
4	
סה"כ	

חלק ראשון: לכל שאלה משקל זהה (40 נקודות).  
נמקו היטב את טענותיכם ושיקוליכם ונסחו במדויק תוצאות קודמות שעליהן הנכם מסתמכים.

(1) בשאלה זו אנו עוסקים במרחב הפולינומים עם מקדמים מרוכבים

$$\mathbb{C}_{\leq 5}[x] = \{f(x) = a_5x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 : a_5, \dots, a_0 \in \mathbb{C}\}$$

נגדיר  $U = \{f(x) \in \mathbb{C}_{\leq 5}[x] : f(i) = f(-i) = f(0) = 0\}$  וכן  $V = \text{span}(x^3 - x, x^5 - x)$  (א) (15 נק') מצאו את  $\dim(U + V)$ ,  $\dim(U \cap V)$ ,  $\dim(U)$ ,  $\dim(V)$  ונמקו במדויק את תשובותיכם.

(ב) (15 נק') מצאו בסיס של  $U$ , של  $U + V$  ושל  $U \cap V$

(ג) (10 נק') הרחיבו את הבסיס שמצאתם בסעיף הקודם עבור  $U$  לבסיס עבור כל המרחב הוקטורי  $\mathbb{C}_{\leq 5}[x]$

(2) בשאלה אין קשר בין סעיף א' וסעיף ב'.

(א) (30 נק') יהא  $V = M_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$  מרחב המטריצות הריבועיות

הממשיות בגודל שתיים. האם קיימת טרנספורמציה לינארית  $T : V \rightarrow V$  עם התכונות הבאות:

$$\text{Ker}(T) = \text{Im}(T) = \text{span}(A, B)$$

כאשר

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

אם קיימת כזו טרנספורמציה, הציגו נוסחה מלאה בתצורה  $T\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right)$  ודונו בשאלה האם טרנספורמציה לינארית שמקיימת תנאים אלו היא יחידה. אם לא קיימת טרנספורמציה לינארית כזו, תנו הוכחה לכך.

(ב) (10 נק') תהי  $I : \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3$  העתקת הזהות. הראו כי אם  $T : \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3$  טרנספורמציה לינארית אז אפשר למצוא עשרה מספרים מרוכבים, לא כולם שווים לאפס  $c_1, \dots, c_{10}$  כך שמתקיים

$$c_1 I + c_2 \cdot T + c_3 \cdot T^2 + \dots + c_{10} \cdot T^9 = 0$$

בחלק זה בחרו סעיף אחד נכון בכל אחת מהשאלות הבאות. תשובה נכונה מזכה ב  $10^{-}$  נקודות

---

(3) תהי  $A \in M_{3 \times 3}(\mathbb{R})$  ותהי  $B \in M_{4 \times 3}(\mathbb{R})$  וידוע כי  $\text{rank}(A) = 2, \text{rank}(B) = 1$ . מי מהבאים אפשרי

- (א) מרחב השורות של  $AB$  הוא ממימד שלוש.
  - (ב) מרחב העמודות של  $BA$  הוא ממימד שלוש.
  - (ג) מרחב הפתרונות של המערכת ההומוגנית  $BAx = 0$  הוא ממימד שלוש.
  - (ד) למטריצה  $BA$  יש שתי שורות בלתי תלויות
- 

(4) מבין ההעתקות הבאות מיצאו טרנספורמציות לינאריות  $T : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$  מעל  $\mathbb{R}$

- (א)  $T(z, w) = (z + w, z - \text{Re}(w))$
- (ב)  $T(z, w) = (z^2 + w, z^3 - \text{Re}(w))$
- (ג)  $T(z, w) = (|z| + |w|, |z| - \text{Re}(|w|))$
- (ד)  $T(z, w) = (z + w, z - w + 1)$