BEN-GURION UNIVERSITY OF THE NEGEV
BE'ER SHEVA 84105, ISRAEL

אוניברסיטת בן־גוריון בנגב
באר שבע 84105

מבחן באלגברה 1

מס' קורס: 201.1.9641
סמסטר א', תש"עד ;
מרצים: פרופ' ג. משביצקי, פרופ' ו. ויניקוב, ד"ר נ. גולקו, ד"ר א. מצרי, ד"ר א. סייג
תאריך הבחינה: 28.1.2015
מיועד לתלמידי הנדסה
משך הבחינה: שלוש וחצי שעות ; חומר עזר: מחשבונים

במבחן זה שני חלקים. בחלק הראשון יש ארבע שאלות ועליכם לענות על שלוש. בחלק השני שלוש שאלות אמריקאיות.

בהצלחה !!

טבלת ניקוד - לשימוש הבודקים

שאלה	ציון
1א	
1ב	
1ג	
2א	
2ב	
2ג	
2ד	
3א	
3ב	
3ג	
3ד	
3ה	
4א	
4ב	
4ג	
4ד	
5	
6	
7	
סה"כ	

חלק ראשון: בחרו שלוש שאלות וסמנו בגוף השאלון את השאלות שבחרתם. לכל שאלה משקל זהה (27 נקודות).
נמקו היטב את טענותיכם ושיקוליכם ונסחו במדוייק תוצאות קודמות שעליהן הנכם מסתמכים.

---

1) יהי
$$\mathbb{C}_{\leq 3}[x] = \{f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d : a, b, c, d \in \mathbb{C}\}$$
מרחב הפולינומים עם מקדמים מרוכבים ממעלה שלוש לכל היותר. נתבונן בט"ל
$$T : \mathbb{C}_{\leq 3}[x] \to \mathbb{C}_{\leq 3}[x]$$
המוגדרת על ידי $T(ax^3 + bx^2 + cx + d) = cx^3 + dx^2 + ax + d$

א) (5 נק') מצאו את כל ה $f(x) \in \mathbb{C}_{\leq 3}[x]$ כך ש $T(f(x)) = x^2 + x + 1$.

ב) (8 נק') יהא $E = \{x^3, x^2, x, 1\}$ בסיס סדור ל $\mathbb{C}_{\leq 3}[x]$. מצאו בסיס סדור נוסף B למרחב $\mathbb{C}_{\leq 3}[x]$ כך שיתקיים

$$[T]_E^B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

ג) (9 נק') מצאו בסיס D למרחב כך ש $[T]_D^D$ מטריצה אלכסונית. האם בסיס כזה הוא יחיד ? נמקו ! האם T הפיכה ? הוכיחו שכן או חשבו את הגרעין של T.

ד) (5 נק') מצאו, לכל מספר טבעי n את הערך
$$T^n(ax^3 + bx^2 + cx + d).$$

---

2) נגדיר וקטורים $w = \begin{pmatrix} i \\ i \\ i \end{pmatrix}$; $v = \begin{pmatrix} i \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; $u = \begin{pmatrix} i \\ i \\ 0 \end{pmatrix}$.

על אופרטור לינארי $T : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ ידוע כי

- $Im(T) = Span\{u, v\}$
- הוקטור w הוא וקטור עצמי של T
- לכל $x \in Im(T)$ מתקיים $T(x) = x$

א) (5 נק') הראו כי אפס הוא ע"ע של T.

ב) (9 נק') מצאו ערכים עצמיים ווקטורים עצמיים עבור T. האם T לכסין ?

ג) (5 נק') הראו כי אופרטור T המקים הדרישות הנ"ל הוא יחיד ומצאו נוסחא עבור $T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

ד) (5 נק') יהי $d = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

הציגו את הוקטור d כסכום של ו"ע של T וחשבו את $(T-3I)^{-1}d$.

ה) (3 נק') הראו כי $T^2 = T$.

---

3)

א) (5 נק') תהי A מטריצה ריבועית הפיכה בגודל n ונניח כי עבור מטריצה $B_{n\times m}$ מתקיים

$$AB = 0_{n\times m}$$

הראו כי $B = 0$.

ב) (12 נק') תהי A מטריצה ריבועית לא הפיכה בגודל n. הראו כי לכל m קיימת מטריצה $B_{n\times m} \neq 0_{n\times m}$ עבורה מתקיים $AB = 0_{n\times m}$.

ג) (10 נק') יהא V מ"ו ארבע מימדי עם בסיס $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$. תהי $T : V \to V$ טרנספורמציה המקיימת $T(v_1) = v_2, T(v_2) = v_3, T(v_3) = v_4, T(v_4) = v_1$. האם $T^2 - I_V$ הפיכה ? אם כן הוכיחו ואם לא מצאו טרנספורמציה $S : V \to V$ שונה מאפס כך שמתקיים

$$(T^2 - I_V) \circ S = 0$$

---

4) נתון מרחב וקטורי U מעל $\mathbb{C}$ עם מכפלה פנימית וידוע כי $E = (e_1, e_2, e_3)$ הוא בסיס אורתונורמלי. נגדיר $V = Span(e_1 + ie_2 + ie_3, e_1 + ie_2)$.

א) (5 נק') מצאו בסיס אורתונורמלי עבור $V^\perp$.

ב) (7 נק') מצאו בסיס אורתונורמלי עבור V.

ג) (8 נק') נגדיר אופרטור לינארי $T : U \to U$ על ידי $T(x) = Pr_{V^\perp}(x)$ ההיטל האורתוגונלי של הוקטור x על תת המרחב $V^\perp$. מיצאו את המטריצה $[T]_E^E$ של האופרטור T בבסיס E.

ד) (8 נק') מיצאו את המטריצה $[T^*]_E^E$ המייצגת את האופרטור הצמוד $T^* : U \to U$ בבסיס E ומצאו את $T^*(e_1)$.

בחלק זה בחרו סעיף אחד נכון בכל אחת מהשאלות הבאות. תשובה נכונה מזכה ב־7 נקודות

---

5) נתונה העתקות ליניאריות $T, S : \mathbb{R}^{2014} \to \mathbb{R}^{2014}$ וכן $ST = 0$ אז בהכרח מתקיים:
- (א) $\dim(Im(S)) = 0$ או $\dim(Im(T)) = 0$
- (ב) $\dim(Ker(S)) = 0$ או $\dim(Ker(T)) = 0$
- (ג) $\dim(Ker(S)) + \dim(Ker(T)) \leq 2014$
- (ד) $\dim(Im(S)) + \dim(Im(T)) \leq 2014$

---

6) V ממ"פ ו $T : V \to V$ אופרטור ליניארי המקיים את התנאי $TT^* = I$ אז הפולינום האופייני של T יכול להיות הפולינום:
- (א) $x^2 - 4$
- (ב) $x^2 - x$
- (ג) $x^2 + x$
- (ד) $x^2 + 1$

---

7) V מ"ו עשרה מימדי עם בסיס B ו $T : V \to V$ אופרטור ליניארי הפיך המקיים

$$T^{2015} + 2T^{2014} = 0$$

אזי עבור המטריצה $A = [T]_B^B$ בהכרח מתקיים:
- (א) $det(A) = -1$
- (ב) $det(I + A) = 0$
- (ג) $det(A) = 1024$
- (ד) $det(A) = -1024$