שאלות נוספות

---

1) העתקות שומרות אורך שומרות זוית

- הראו כי לכל שני וקטורים בממ"פ ממשי V מתקיים

$$(u,v)=\frac{1}{4}[(u+v,u+v)-(u-v,u-v)]$$

- כיתבו נוסחה דומה עבור וקטורים במרחב מכפלה פנימית מרוכב.
- הראו כי אם עבור מטריצה $A\in M_n(\mathbb{R})$ מתקיים $(Au,v)_{st}=0$ לכל $u,v\in\mathbb{R}^n$ אזי $A=0$
- הראו כי אם $A,B\in M_n(\mathbb{R})$ מקיימות $(Au,v)=(Bu,v)$ לכל $u,v\in\mathbb{R}^n$ אזי $A=B$
האם השויון $(Av,v)=(Bv,v)$ לכל $v\in\mathbb{R}^n$ גורר $A=B$
- נסחו גרסה מרוכבת של הסעיף הקודם.
- הראו כי אם $T:V\to V$ היא ט"ל ששומרת אורכים כלומר $(Tv,Tv)=(v,v)$ לכל $v\in V$ אזי T שומרת את המכפלה הפנימית כלומר $(Tu,Tv)=(u,v)$ לכל $u,v\in V$ ובפרט T שומרת זויות.

---

2) ע"ע של אופרטור הצמוד לאופרטור נורמלי

- הראו כי אם $T:V\to V$ נורמלי כלומר $T^*T=TT^*$ אזי $||T(v)||=||T^*(v)||$ לכל $v\in V$ ובפרט $Ker(T)=Ker(T^*)$.
- הראו כי אם T נורמלי אזי $T-aI_V$ נורמלי.
- הסיקו כי אם $a\in\mathbb{C}$ ערך עצמי של T נורמלי אזי $\bar{a}\in\mathbb{C}$ הוא ערך עצמי של T^*

---

3) נתונה $T:V\to T$ המקיימת $T^2=T$. הראו כי T לכסינה.

- הראו כי וקטור נמצא בתמונה של T אם ורק אם T שולחת אותו לעצמו. כלומר הראו כי $Ker(I-T)=Im(T)$
- הראו כי $Ker(T)\cap Im(T)=\{0\}$
- העזרו במשפט המימד כדי להראות שיש מספיק וקטורים עצמיים.
- מצאו את הערכים העצמיים ואת הצורה האלכסונית.
- באיזה תנאים אפשר להבטיח בסיס אורתונורמלי B עבור V כך ש T תיוצג כמטריצה אלכסונית בבסיס B הראו כי אם בסיס כזה קיים אז קיים תת מרחב $W\subset V$ כך ש $T=P_W$ ההטל האורתוגונלי.

---

4) נתונה מטריצה A וידוע כי שורותיה מהווים בסיס אורתונורמלי עבור $\mathbb{R}^n$ עם המכפלה הסטנדרטית. הראו כי גם עמודות A מהוות בסיס אורתונורמלי.

---

5) גרעיו ותמונה של אופרטורים צמודים

- הראו כי $(T^*)^* = T$ עבור $T : V \to V$ בממ"פ V.
- הראו כי $Ker(T^*) = Im(T)^+$ וכי $Im(T^*) = Ker(T)^+$
- הסיקו כי $rank(T) = rank(T^*)$ זה נותן הוכחה חדשה לכך שדרגת השורות שווה לדרגת העמודות.
- הראו כי אם $T = T^*$ אזי $Ker(T)$ ניצב ל $Im(T)$

---

6) הרחבה על שאלה 3 מדף מספר 12. נתון $W \subset \mathbb{R}^m$ ונתון וקטור $b \in \mathbb{R}^m$

- הראו כי הוקטור $w \in W$ הקרוב ביותר לוקטור $b \in \mathbb{R}^m$ מקיים $w = P_W(b)$ כלומר הראו כי לכל $w \in W$ מתקיים

$$||w - b|| \geq ||P_W(b) - b||$$

- נתון וקטור $b \in \mathbb{R}^m$ ומטריצה $A_{m\times n}$. הראו כי למשוואה $Ax = b$ יש פתרון אם ורק אם $b \in W = Span\{a_1, ..., a_n\}$ כאשר $a_1, ..., a_n$ הם וקטורי העמודה של A
- נניח כי למערכת $Ax = b$ אין פתרון ונגדיר $W = Span\{a_1, ..., a_n\}$ מרחב השורות של A הציעו דרך למצוא את הוקטור x שעבורו הטעות $||Ax - b||$ קטנה ביותר. הדרכה: העזרו בסעיף הקודם כדי להסיק שהוקטור $b_1 = P_W(b) \in \mathbb{R}^m$ הוא הקומבינציה הלינארית של עמודות A שקרובה ביותר לוקטור b ומכאן הסיקו שיש למצוא x עבורו $Ax = P_W(b)$
- הראו כי הפתרון x של המשוואה $A^tAx = A^tb$ מקיים את הנדרש בסעיף הקודם.
- הסיקו כי אפשר למצוא פתרון מקורב ל $Ax = b$ על ידי הכפלה פורמלית ב A^t ופתרון המערכת הריבועית $A^tAx = A^tb$. בצעו זאת עבור המערכת בשאלה 3 מדף 12.

---

7) מצאו תנאים שעבורם קיים $T : V \to V$ המקיים $T(v_1) = w_1, ..., T(v_k) = w_k$ כאשר $v_1, ..., v_k$ קבוצה אורתונורמלית. דונו במקרים הבאים:

- T אופרטור לינארי כלשהוא
- T אופרטור אוניטרי
- T אופרטור צמוד לעצמו הדרכה: אופרטור אוניטרי שומר אורכים, אופרטור צמוד לעצמו הוא בעל יצוג כמטריצה הרמיטית בבסיס אורתונורמלי.

(8

- תהי $(,)_{st}$ המכפלה הפנימית הסטדנטרטית על $\mathbb{R}^n$.

$$(x, y)_{st} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

הראו כי עבור מטריצה $A \in M_n(\mathbb{R})$ מתקיים

$$(Au, v)_{st} = (u, A^t v)_{st}$$

ודונו בגרסה המרוכבת.

- עבור מטריצה סמיטרית $A \in M_n(\mathbb{R})$ מגדירים $Q_A(v,u) = (Av,u)_{st}$ הראו כי זו מכפלה פנימית על $\mathbb{R}^n$ אם ורק אם כל הערכים העצמיים של A הם חיוביים. הדרכה: זיכרו כי A לכסינה עם ערכים עצמיים ממשיים. בכיוון אחד כיתבו

$$A = PDP^{-1} = PDP^t$$

עבור מטריצה אורתוגונלית P ווידאו כי

$$Q_A(v,v) = (Av,v) = (PDP^t v, v) = (DP^t v, P^t v)$$

כעת בצעו הצבה $w = P^t v$ והשתמשו בעובדה שהערכים העצמיים של D חיוביים. הכיוון השני דומה.

- קיבעו מי מהמטריצות הבאות הן חיוביות

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \; ; B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix} \; ; C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \; ;$$

- קיבעו את הערכים העצמיים והוקטורים העצמיים של מטריצה C מהסעיף הקודם. בפרט קבעו את הפולינום האופייני שלה.