BEN-GURION UNIVERSITY OF THE NEGEV
BE'ER SHEVA 84105, ISRAEL

אוניברסיטת בן־גוריון בנגב
באר שבע 84105

תרגיל מספר 12

---

1) ליכסון אורתוגונלי
קיבעו עבור המטריצות הבאות האם הן ניתנות לליכסון אורתוגונלי אם הדבר אפשרי כתבו מטריצה P אורתוגונלית כך ש $A = PDP^{-1}$ עם D אלכסונית

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} ;\ B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} ;$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix} ;\ D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} ;$$

---

2) אופרטור הוא צמוד לעצמו אם $T^* = T$ אוניטרי אם $T^*T = TT^* = I$ ונורמלי אם $T^*T = TT^*$. קיבעו מי מהאופרטורים הבאים הוא אוניטרי, צמוד לעצמו או נורמלי

- $V = \mathbb{C}^3$ עם המכפלה הסטנדרטית $T : V \to V$ ניתן על ידי
$$T(x, y, z) = (x - iy, z - x, x + y + iz)$$

- $V = \mathbb{C}^3$ עם המכפלה הסטנדרטית $S : V \to V$ ניתן על ידי
$$S(x, y, z) = (x + 2y, 2x + 4y + 3z, 5z + 3y)$$

- $V = M_3(\mathbb{R})$ עם המכפלה הסטנדרטית $T : V \to V$ ניתן על ידי
$$T(A) = A - A^t$$
נזכיר כי המכפלה על V זה ניתנת על ידי $(A, B) = tr(AB^t)$ כאן $tr(X)$ של המטריצה הריבועית X הוא סכום איברי האלכסון שלה. תוכלו להעזר בעובדה הבאה
$$tr(AB) = tr(BA)$$

- $V = \mathbb{R}^2$ עם המכפלה הבאה $((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = x_1y_1 + 2x_2y_2$
$T : V \to V$ ניתן על ידי $T(x, y) = (x + y, x + 2y)$

---

3) נתון $W = span\{(1, 0, 1), (2, 1, 0)\}$ ונתון $v = (1, 1, 1) \in \mathbb{R}^3$

- כתבו נוסחה להיטל $P_W : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ולהיטל P_{W^+}

- הראו כי מכל הקומבינציות הלינאריות $a(1,0,1)+b(2,1,0)$ הוקטור $P_W(v)$ הוא הקרוב ביותר לוקטור v כלומר הוכיחו

$$min_{a,b\in\mathbb{R}}||a(1,0,1)+b(2,1,0)-(1,1,1)|| = ||P_W(1,1,1)-(1,1,1)||$$

ומצאו ערך זה.
- נתון וקטור $b\in\mathbb{R}^m$ ומטריצה $A_{m\times n}$. הראו כי למשוואה $Ax=b$ יש פתרון אם ורק אם $b\in W=Span\{a_1,...,a_n\}$ כאשר $a_1,...,a_n$ הם וקטורי העמודה של A
- האם למערכת $Ax=b$ יש פתרון כאשר

$$.A=\begin{pmatrix}1&2\\0&1\\1&0\end{pmatrix}\quad .b=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

אם כן מצאו אותו, אחרת הציעו דרך למצוא את הוקטור x שעבורו הטעות $||Ax-b||$ קטנה ביותר.

---

4) ע"ע עצמיים של מטריצות סימטריות, אנטי־סימטריות ואורתוגונליות.

- הראו כי עבור מטריצה אנטי הרמיטית, כלומר $A^*=-A$, הערכים העצמיים הם בהכרח מדומים. רמז: iA היא הרמיטית.
- האם מטריצה אורתוגונלית היא בהכרח לכסינה ? מה ניתן לומר על הערכים העצמיים שלה מעל המרוכבים ?

רמז: $(Av,Av)=(v,A^*Av)=(v,v)$ לכל מטריצה אוניטרית Aוהסיקו כי הע"ע על מעגל היחידה

- הראו שמטריצה אורתוגונלית $A\in M_3(\mathbb{R})$ היא בעלת ערך עצמי ממשי פלוס אחד או מינוס אחד. הסיקו שאם בנוסף $det(A)=1$ הרי יש וקטור $v\in\mathbb{R}^3$ כך ש $Av=v.$ מה המשמעות הגיאומטרית של וקטור זה ?

רמז: המפתח הוא שלפולינום ממשי ממעלה שלישית יש שורש ממשי. העזרו בכך שהדטרמיננטה שווה למכפלת הערכים העצמיים, הערכים העצמיים הם על מעגל היחידה והם שרשים של פולינום ממשי ממעלה שלישית. שרשים מרוכבים של פולינום ממשי הם צמודים.

---

5) יהא V ממ"פ הראו כי אם $T:V\to V$ הוא צמוד לעצמו אזי $Ker(T)$ ניצב ל $Im(T)$

---

6) האם קיים אופרטור אוניטרי $T:\mathbb{C}^3\to\mathbb{C}^3$ כך ש $Im(T)=Span\{(1,0,i),(i,2i,1)\}$ וכן $.Ker(T)=(1,1,i)$ האם קיים כזה אופרטור צמוד לעצמו ? אם כן מצאו כזה. האם כזה אופרטור הוא יחיד ?