

## פרוקי מטריצות

### (1) שורש ממטריצה חיובית

- הראו כי אם  $A$  מטריצה כלשהיא הרי המטריצה  $B = A^t + A$  והמטריצה  $C = A^t A$  שתייהן סימטריות. במיוחד הראו כי  $C$  בעלת ערכים עצמיים חיוביים.
- מטריצה סימטרית נקראת חיובית אם לכל  $v \in \mathbb{R}^n$  מתקיים  $(Av, v)_{st} \geq 0$  ושווה אפס רק עבור  $v = 0$ . הראו כי קיימת  $B$  סימטרית וחיובית המקיימת  $B^2 = A$
- הדרכה: לכסנו את  $A = PDP^{-1}$  בצורה אורתוגונלית והעזרו בכך שהע"ע הם ממשיים וחיוביים. רשמו  $B = PD^{1/2}P^{-1}$  והראו כי היא מקיימת הנדרש.

### (2) פרוק SVD

- תהי  $A_{m \times n} \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$  מטריצה לאו דווקא ריבועית. אומרים כי למטריצה יש פירוק SVD אם ניתן לרשום אותה בצורה  $A = U\Sigma V^t$  כאשר  $U, V$  מטריצות אורתוגונליות ואילו  $\Sigma$  מטריצה אלכסונית
- הראו כי  $A^t A = V\Sigma^2 V^t$  והסיקו דרך למצוא את המטריצה  $\Sigma$  ואת המטריצה  $V$  פעלו בצורה דומה עם  $AA^t$  ומצאו דרך לגלות את  $U$ .
- הראו כי לכל מטריצה הפיכה  $A_{n \times n} \in M_n(\mathbb{R})$  יש פירוק SVD. הדרכה:  $A^t A$  היא סימטרית ולכן ניתנת ליצוג  $A^t A = VDV^t$  כעת ניתן להגדיר שורש סימטרי של  $A^t A$  שיוסמן  $B = VD_1 V^t$  ומתקיים  $B^t B = B^2 = A^t A$  ומכאן

$$(AB^{-1})^t(AB^{-1}) = (B^{-1})^t A^t AB^{-1} = (B^{-1})^t B^t BB^{-1} = I$$

כלומר  $P = AB^{-1}$  אורתוגונלית וכן  $A = PB = PVD_1 V^t$  נגדיר  $U = PV$  ונבדוק שהיא אורתוגונלית ומתקיים  $A = UD_1 V^t$ .  
כעת הכלילו למקרה הלא הפיך.

- הראו כי לכל מטריצה  $A_{m \times n} \in M_n(\mathbb{R})$  יש פירוק SVD.
- הראו כי לכל מטריצה  $A_{m \times n} \in M_n(\mathbb{C})$  יש פירוק SVD.
- מצאו פירוק כזה עבור המטריצה

$$.A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

### (3) פירוק QR

הראו כי כל מטריצה  $A \in M_n(\mathbb{R})$  ניתנת לכתיבה  $A = QR$  כאשר  $Q$  מטריצה אורתוגונלית והמטריצה  $R$  היא משולשית עליונה. הדרכה: בתהליך גרהם שמידט על וקטורי  $A$  שימו לב שהוקטורים החדשים תלויים רק בקודמים כלומר הפעולה המבוצעת על הוקטורים היא שילוב

של פעולות אלמנטריות על שורות קודמות ולכן ניתנות על ידי מטריצה משולשית היפכו טיעון  
מילולי זה להוכחה.

ראו גם בקישור הבא

*[http://www.columbia.edu/itc/applied/e3101/SVD\\_applications.pdf](http://www.columbia.edu/itc/applied/e3101/SVD_applications.pdf)*