

בעיה 1

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad a_{ij} \in \mathbf{K} \quad : \mathbf{K} \text{ מעל שדה } \mathbf{K}$$

אלגוריתם

צעד 1- מצא את העמודה הראשונה עם איבר שונה מ-0, נניח שזו עמודה i_1 .

צעד 2- החלף בין השורות, כך שהאיבר השונה מאפס יופיע בשורה הראשונה של העמודה ה- i_1 , כלומר כך ש- $a_{1i_1} \neq 0$. (איבר הזה נקרא איבר המוביל בצורה מדורגת של A)

צעד 3- השתמש ב- a_{1i_1} כדי לאפס את כל האיברים מתחת ל- a_{1i_1} , כלומר, לכל $j > 1$, יישם את פעולת השורה:

$$\frac{-a_{ji}}{a_{1i_1}} R_1 + R_j \rightarrow R_j$$

צעד 4 - חזור על צעדים 1, 2, 3 עם תת-המטריצה המורכבת מכל השורות מלבד השורה הראשונה עד שתגיע לצורה מדורגת

הערה: אם כל האיבר המוביל בצורה מדורגת של A הוא אחד וכל האיברים הנותרים באותה עמודה עם איבר המוביל הם אפסים אזי אנו נקבל מטריצה שנקראת צורה קנונית מדורגת של A .

דוגמא:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \\ -2 & -4 & 3 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{דרג את מטריצה } A:$$

פתרון:

נבצע $L_1 \leftrightarrow L_2$ כדי שיתקיים $a_{11} \neq 0$ ונשתמש בו כציר לאפס את האיברים שמתחתיו:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\begin{matrix} -3L_1 + 2L_3 \rightarrow L_3 \\ L_1 + L_4 \rightarrow L_4 \end{matrix}]{-} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -6 & 1 \\ 0 & 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

כעת משתמש ב- a_{22} כדי לאפס את האיברים שמתחתיו:

$$\xrightarrow[\begin{matrix} L_2 - L_3 \rightarrow L_3 \\ 2L_2 + L_4 \rightarrow L_4 \end{matrix}]{-} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 7 & -2 \\ 0 & 0 & 7 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{-L_3 + L_4 \rightarrow L_4} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 7 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

כעת לאחר שאיפסנו גם את האיברים שמתחת a_{33} קיבלנו צורה מדורגת.