בעיה 2

פתור את המערכת מעל שדה $\mathbf{K}$:

$$(*)\quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots a_{1n}x_n = b_1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots a_{mn}x_n = b_m \end{cases},\qquad a_{ij}, b_i \in \mathbf{K}.$$

אלגוריתם הצמצום (Gauss elimination)

צעד 1-הרכיב את מטריצה M המורכבת שמתאימה למערכת $(*)$.

$$M = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \dots\dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & \dots\dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots\dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots\dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

צעד 2 - דרג את המטריצה M לצורה מדורגת קנונית M' (ניתן להניח שמקדמים המובילים ב-M' נמצאים ב-r שורות הראשונות). אם בצורה מדורגת קנונית M' מופיע שורה $\left(0 \quad 0 \quad 0 \quad | 1\right)$ אזי המערכת $(*)$ היא לא קונסיסטנטית, אחרת נקבל את מטריצה M' מצורה הבאה:

$$M' = \left(\begin{array}{ccccccc|c} 1 & 0 & \dots & 0 & \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1,n-r} & \beta_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \alpha_{21} & \dots & \alpha_{2,n-r} & \beta_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \alpha_{r1} & \dots & \alpha_{r,n-r} & \beta_r \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \end{array}\right),\qquad \alpha_{ij}, \beta_i \in \mathbf{K}$$

צעד 3 - עבר למערכת משוואות ליניארית $(**)$ שמתאימה למטריצה M':

$$(**)\quad \begin{cases} x_1 + \alpha_{11}x_{r+1} + \dots \alpha_{1,n-r}x_n = \beta_1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_r + \alpha_{r1}x_{r+1} + \dots \alpha_{r,n-r}x_n = \beta_r \end{cases}$$

צעד 4 - במערכת $(**)$ הנעלמים $x_1, x_2, \dots\dots, x_r$ הם נעלמים המובילים (הלא חופשיים). הנעלמים $x_{r+1}, x_{r+2}, \dots, x_n$ הם נעלמים החופשיים. פתרון הכללי של מערכת $(*)$ (או כמובן $(**)$) הוא הבא:

$$\begin{aligned} x_1 &= -\alpha_{11}h_1 - \dots - \alpha_{1,n-r}h_{n-r} + \beta_1, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_r &= -\alpha_{r1}h_1 - \dots - \alpha_{r,n-r}h_{n-r} + \beta_r, \\ x_{r+1} &= h_1, x_{r+2} = h_2, \dots\dots x_n = h_{n-r}. \end{aligned}$$

כאן $h_1, h_2, \dots, h_{n-r}$ הם קבועים שרירותיים (פרמטרים) ששייכים לשדה $\mathbf{K}$. אם $r = n$ אזי למערכת יש רק פתרון יחיד. אם $r < n$ אזי המערכת בעלת מספר אינסופי של פתרונות.

<u>דוגמא א</u>

פתור את מערכת מעל $\mathbf{R}$

$$\begin{cases} 5x_1 + 4x_2 + x_3 + 3x_4 = -5 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + 4x_4 = 2 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = -3 \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_4 = -4 \end{cases}$$

<u>פתרון:</u>

מטריצה מורכבת M שמתאימה למערכת (1) היא הבאה:

$$M = \left(\begin{array}{cccc|c} 5 & 4 & 1 & 3 & -5 \\ 2 & 1 & 1 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & -3 \\ 1 & 3 & -2 & 2 & -4 \end{array}\right)$$

צורה מדורגת של M היא M'

$$M' = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

מערכת משוואות ליניארית (2) שמתאימה למטריצה M' היא הבאה:

$$(2)\begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ x_2 - x_3 = -2 \\ x_4 = 1 \end{cases}$$

כאן נעלם החופשי הוא x_3. פתרון הכללי של המערכת (2) (וכמובן למערכת (1)) הוא הבא:

$x_1 = -h,\ x_2 = h-2,\ x_3 = h,\ x_4 = 1$ כאשר $h \in \mathbf{R}$.

<u>דוגמא ב</u>

פתור את מערכת:

$$(3)\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 1 \\ 4x_1 + 3x_2 = 2 \end{cases}$$

<u>פתרון:</u>

תהי מטריצה מורכבת M שמתאימה למערכת (3):

$$M = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

נדרג את מטריצה M למטריצה M'

$$M' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

מפני שמטריצה M' מכילה את שורה מצורה $\left(0 \quad 0 \quad 0 \quad | 1\right)$ למערכת (3) אין פתרונות.