תרגיל 7. טרנספורמציות (העתקות) לינאריות. גרעין ותמונה.

1) בדקו האם טרנספורמציה T ממרחב וקטורי U למרחב וקטורי V היא טרנספורמציה לינארית

א) $U=V=R^3, T(x,y,z)=(x+y,0,2x+z)$, ב) $U=V, T(\vec{a})=3\vec{a}$, ג) $U=R^3, V=R, T(x,y,z)=x-z$

ד) $U=V=R^R,\ T(f(x))=f(-x)$, ה) $U=V=R^2, T(x,y)=(x+y,1)$, ו) $U=V=R^2, T(x,y)=(xy,0)$.

2) $R_{<3}[x]=\left\{ax^2+bx+c \,\middle|\, a,b,c\in R\right\}$. עבור טרנספורמציות הבאות $T: R_{<3}[x]\to R_{<3}[x]$

בדקו כי T היא טרנספורמציה לינארית ומצאו בסיס והמימד של הגרעין ושל התמונה של T.

א) T היא טרנספורמציה גזירה: $(T(f)=f')$ $T(ax^2+bx+c)=2ax+b$.

ב) $T(f)=(x-2)f''+xf'-3f$, ג) $T(f(x))=f(x-2)$

3) נתונה מטריצה $M=\begin{pmatrix}1&2\\1&1\end{pmatrix}$, טרנספורמציה $T: M_{2\times2}(R)\to M_{2\times2}(R)$ מוגדרת על-ידי $T(A)=MA$.

א) בדקו כי T היא טרנספורמציה לינארית, ב) מצאו בסיס והמימד של הגרעין והתמונה של T.

4) נתונה טרנספורמציה $\mathbf{S}_\phi: M_{3\times3}(\mathbf{R})\to M_{3\times3}(\mathbf{R})$ מ-$M_{3\times3}(\mathbf{R})$ ל-$M_{3\times3}(\mathbf{R})$ המוגדר על ידי

$\mathbf{S}_\phi(X)=\phi(X)$ כאשר ϕ היא פעולה שורות אלמנטרית. בדקו כי $\mathbf{S}_\phi$ היא טרנספורמציה לינארית.

5) האם קיימת טרנספורמציה לינארית $T: R^3\to R^4$ שמקיימת תנאי

א) $T\begin{pmatrix}0\\2\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\2\end{pmatrix}, T\begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\0\\0\\1\end{pmatrix}, T\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}$, ב) $T\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\2\end{pmatrix}, T\begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\0\\0\\1\end{pmatrix}, T\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}$.

6) תהי $T: R^4\to R^2$ ההעתקה הליניארית המוגדרת ע"י הנוסחה:

$T(x,y,z,s)=(x+2y+z-3s, 2x+5y+4z-5s)$. מצאו בסיס והמימד עבור הגרעין והתמונה של T.

7) נתונה מטריצה $A=\begin{pmatrix}1&2&3&1\\1&3&5&-2\\3&8&13&-3\end{pmatrix}$ וטרנספורמציה ליניארית $T: R^4\to R^3$ מוגדרת על-ידי $T(v)=Av$.

מצאו בסיס והמימד עבור הגרעין והתמונה של T.

8) על העתקה ליניארית $T: R^4\to R^2$ ידוע כי $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=T\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}=T\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}=T\begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\end{pmatrix}$ וגם וקטורים $T\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}, T\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}$

הם בלתי תלוים לינארית. מצאו בסיס והמימד עבור הגרעין והתמונה של T.

9) א) על טרנספורמציה ליניארית $T: R^3 \to R^5$ ידוע כי $T(a)=T(b)=T(c)=u\neq 0$
כאשר (a,b,c) הוא בסיס של R^3. מצאו בסיס של $\mathrm{Im}(T)$ ושל $Ker(T)$.
ב) על טרנספורמציה ליניארית $T: R^2 \to R^5$ ידוע כי $T(b)=3T(a)=c\neq 0$. מצאו בסיס של $Ker(T)$, $\mathrm{Im}(T)$.

10) יהא V מרחב ווקטורי. $T: V\to V$ אופרטור ליניארי. הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות.
א) אם $\dim(V)=1$ אז עבור אופרטור ליניארי $T:V\to V$ מתקיים $T(a)=\alpha a$
ב) עבור כל תת מרחב U של V קיים אופרטור ליניארי $T:V\to V$ כך ש- $\mathrm{Im}(T)=U$
ג) עבור כל תת מרחב U של V קיים אופרטור ליניארי $T:V\to V$ כך ש- $Ker(T)=U$
ד) עבור כל תתי מרחבים U,W של V קיים אופרטור ליניארי $T:V\to V$ כך ש- $\mathrm{Im}(T)=U$ ו- $Ker(T)=W$
ה) עבור כל תתי מרחבים U,W שמקיימים תנאי $V=U\oplus W$ קיים אופרטור ליניארי $T:V\to V$
כך ש- $\mathrm{Im}(T)=U$ ו- $Ker(T)=W$
ו) עבור כל מרחב ווקטורי V קיים אופרטור ליניארי $T:V\to V$ כך ש- $\mathrm{Im}(T)\subseteq Ker(T)$
ז) עבור כל מרחב ווקטורי V קיים אופרטור ליניארי $T:V\to V$ כך ש- $\mathrm{Im}(T)=Ker(T)$
ח) אם $A:U\to V$ טרנספורמציה ליניארית ו- $u_1,...,u_s$ תלוים ליניארית אז $A(u_1),...,A(u_s)$ תלוים ליניארית.
ט) אם $A:U\to V$ טרנספורמציה ליניארית ו- $u_1,...,u_s$ בלתי תלוים ליניארית אז $A(u_1),...,A(u_s)$
בלתי תלוים ליניארית.