תרגיל 8. המטריצה המייצגת. אלגברה של טרנספורמציות לינאריות.

1) יהי $S:V\to V$ אופרטור לינארי במרחב ווקטורי V, $A=(u_1,\ u_2,\ u_3)$ בסיס ב- V.

$$[S]_A^A=\begin{pmatrix}-2 & -1 & 3\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 2 & -2\end{pmatrix}$$

נגדיר בסיסים ב- V: $B=(u_1,\ u_3,\ u_2)$ ו- $C=(u_1,\ u_1+u_2,\ u_1+u_2+u_3)$.

א) מצאו $[S]_B^B,\ [S]_C^B,\ [S]_B^C,\ [S]_C^C$, ב) מצאו $S(u_1+u_2+u_3),\ S(u_1+2u_2-3u_3)$.

2) יהי $S:C^3\to C^3$ אופרטור לינארי, $e=((1,0,0),\ (0,1,0),\ (0,0,1))$ בסיס סטנדרטתי ב- C^3, $b=((i,i,i),\ (i,0,i),(0,i,i))$ בסיס נוסף ב- C^3. $[S]_e^e=\begin{pmatrix}1 & 2 & 2\\ 1 & 2 & -1\\ -1 & 1 & 4\end{pmatrix}$.

א) מצאו $[S]_b^e,\ [S]_e^b,\ [S]_e^e$, ב) $S((1,2,3)),\ \mathrm{S((i,0,1+i))}$.

3) על אופרטור ליניארית $T:R^4\to R^4$ ידוע כי $\mathrm{Im}(T)=Span(\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix})$, $Ker(T)=Span(\begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix})$

מצאו בסיס והמימד עבור הגרעין והתמונה של T. האם אופרטור שמקיים תנאים הנתונים יחיד?

אם אופרטור לא יחיד אז מצאו נוסחות שמגדירות אופרטורים $T_2\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix},T_1\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix}$ שמקיימות תנאים הנתונים.

4) א) ידוע כי $U=Sp(u_1,u_2)\subseteq R^3$ ו- $V=Sp(v_1,v_2,v_3)\subseteq R^4$, $T:U\to V$ טרנספורמציה ליניארית ו- $T(u_1)=v_1,T(u_2)=v_2$. א) מצאו $[T]_v^u$.

ב) ידוע כי $U=Sp(u_1,u_2)\subseteq R^3$ ו- $W=Sp(w_1,w_2)\subseteq R^4$, $S:U\to W$ טרנספורמציה ליניארית ו- $[S]_w^u=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 2\end{pmatrix}$. מצאו $S(2u_1-3u_2)$.

5) תהי $T,\ S:M_{2\times2}(R)\to M_{2\times2}(R)$ אופרטורים ליניאריים מוגדרים על-ידי $T(A)=A^t+A$, $S(A)=A^t-A$

מצאו $ST(A)$ ו- $TS(A)$. האם T הפיך ? האם TS הפיך?

6) במרחב $R_{<3}[x]=\left\{ax^2+bx+c\,\middle|\,a,b,c\in R\right\}$ (של כל הפולינומים מעל R ממעלה קטנה מ- 3) פועלים שני אופרטורים ליניאריים A,B כך ש-

$A(ax^2+bx+c)=bx+c$ ו- $B(x^2+x+1)=0,\ B(x^2+1)=x,\ B(x^2+x)=x+1$

נתבונן במכפלה AB של אופרטורים A ו- B. $E=(x^2,x,1)$.

מצאו את המימד ובסיס של $\mathrm{Im}\,AB$ ושל $Ker\,AB$. מצאו $[AB]_E^E$.

7) מצאו דוגמאות של אופרטורים ליניאריים $T,\ S,\ \mathrm{L}: C_{<3}[x] \to C_{<3}[x]$ כך ש-

א) $T^3 = 0$ ו- $T^2 \neq 0$,

ב) $T^3 = I$ ו- $T^2 \neq I$,

ג) $T^3 = -I$.

8) יהיו $T: U \to V$ ו- $S: U \to V$ שני טרנספורמציות לינאריות. ידוע כי $\mathrm{Im}(T) = \mathrm{Im}(S)$ $Ker(T) = Ker(S)$, $\dim(\mathrm{Im}(T)) = \dim(\mathrm{Im}(S)) = 1$. הוכיחו כי $T = \alpha S$

9) יהיו $T: V \to V$ ו- $S: V \to V$ שני אופרטורים לינאריים על מרחב ווקטורי V מעל שדה F. הוכיחו כי

א) $\dim \mathrm{Im}(TS) \leq \min(\dim \mathrm{Im} T, \dim \mathrm{Im} S)$

ב) אם $\dim(V) = n$ אז $\dim(T^n) = \dim(T^{n+1})$

ג) אם $A \in M_{n \times n}(F)$ אז $rank(A^n) = rank(A^{n+1})$.

10) יהי $E = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ בסיס (סטנדרטי) של מרחב ווקטורי R^4.

יהי $T: R^4 \to R^4$ אופרטור לינארי שמקיים תנאי $Ker(T) = Span(e_1, e_2)$ ו- $\mathrm{Im}(T) = Span(e_3, e_4)$.

האם כל אופרטורים כאלה מהווים תת מרחב במרחב ווקטורי של כל אופרטורים לינאריים ב- R^4.

אם כן מצאו בסיס ומימד של מרחב ווקטורי הזה.