תרגיל 11.מכפלה פנימית.

1) אילו מהנוסחאות הבאות מגדירים מכפלה פנימית ב R^2 עבור ווקטורים $a=(\alpha_1,\alpha_2), b=(\beta_1,\beta_2)$

א) $(a,b)=2\alpha_1\beta_1+7\alpha_2\beta_2$

ב) $(a,b)=\alpha_1\beta_1+\alpha_1\beta_2+\alpha_2\beta_1$

1) ידוע כי $e=(e_1,e_2,e_3,e_4)$ הוא בסיס אורתונורמלי של מרחב מכפלה פנימית.
מצאו נוסחה שמגדירה מכפלה פנימית $<x,y>$ דרך קואורדינאטות

$$[y]_f=\begin{pmatrix}\beta_1\\ \beta_2\\ \beta_3\\ \beta_4\end{pmatrix},\ [x]_f=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\\ \alpha_4\end{pmatrix}$$

כאשר א) $f=(2e_1,3e_2,5e_3,e_4)$, ב) $f=(e_1-e_2,e_2,e_3,e_4)$

2) השלימו קבוצה אורתונורמלית לבסיס אורתונורמלי

א) $a_1=(-\frac{11}{15},-\frac{2}{15},\frac{2}{3}), a_2=(-\frac{2}{15},-\frac{14}{15},-\frac{1}{3})$

ב) $b_1=(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{2}), b_2=(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$

3) מצאו היטל אורתוגונלי ואנך מהווקטור $a=(14,-3,-6,-7)$ למרחב
$U=Span((-3,0,7,6),(1,4,3,2),(2,2,-2,-2))$

4) א) הוכיחו כי במרחב אוקלידי $|x|=|y|$ אם ורק אם הווקטורים $x+y$ ו $x-y$ הם אורתוגונליים.

ב) האם הטענה א) נכונה במרחב אוניטרי.

ג) הוכיחו כי ווקטורים x ו y במרחב אוניטרי הם אורתוגונליים אם ורק אם $|\alpha x+\beta y|^2=|\alpha x|^2+|\beta y|^2$ לכל α,β.

ד) הוכיחו כי במרחב אוקלידי $|x-y|^2=|x|^2+|y|^2$ אם ורק אם ווקטורים x ו y הם אורתוגונליים.

ה) האם הטענה ד) נכונה במרחב אוניטרי.

5) $U=Span((1,1,-1,-2),(-2,1,5,11),(0,3,3,7))$

א) מצאו היטל אורתוגונאלי של ווקטור $a=(3,-3,-3,-9)$ למרחב U .

ב) מצאו בסיס אורתונורמלי למרחב U .

ג) מצאו היטל אורתוגונאלי של הווקטור $a=(3,-3,-3,-9)$ ל-$U^{\perp}$.

6) ידוע כי $e=(e_1,e_2,e_3)$ הוא בסיס אורתונורמלי במרחב ווקטורי U.
א) מצאו בסיס אורתונורמלי למרחב $Span(e_1-e_2,e_1+2e_2)$.

ב) מצאו היטל אורתוגונאלי של ווקטור $e_1+e_2+e_3$ למרחב $Span(e_1-e_2,e_1+2e_2)$.

ג) מצא בסיס למשלים האורתוגונאלי $Span(e_1-e_2,e_1+2e_2)^{\perp}$.

7) ידוע כי $e=(e_1,e_2,e_3,e_4)$ הוא בסיס אורתונורמלי של מרחב מכפלה פנימית U מעל C. יהא $T:U\to U$ אופרטור ליניארי המוגדר על-ידי
$T(a_1e_1+a_2e_2+a_3e_3+a_4e_4)=(ia_1+a_3)e_1-(ia_1+ia_2)e_2-(a_1-ia_4)e_3+(a_3-a_4)e_4$.
א) מצאו בסיס סדור אורתונורמלי ל-$V^{\perp}=Ker(T)^{\perp}$. נסמן אותו ב-B.
מצאו בסיס סדור אורתונורמלי ל-$V=Ker(T)$. נסמן אותו ב-B'.
ב) יהי $\Pr_V:U\to U$ אופרטור ההטלה האורתוגונאלית על V.
ב1) מצאו את $[\Pr_V]_e^e$**.** מצאו $\Pr_V(e_1-e_3+e_4)$.
ב2) מצאו את $[\Pr_V]_D^D$ עבור D הבסיס ל-R^4 בו מופיעים תחילה איברי B' ואחריהם איברי B מסעיף א).
ג) עבור אופרטור ליניארי $\Pr_V$ מסעיף ב) מצאו מטריצה מייצגת $[\Pr^*]_C^C$ בבסיס C כאשר $\Pr^*$ צמוד ל-$\Pr$. מצאו $\Pr_V^*(e_1-e_3+e_4)$.
ד) מצאו את $T^*(e_3)$ כאשר T^* האופרטור ליניארי הצמוד של T.

8) E הוא מרחב איקלידי. $\dim(E)=5$. עבור כל $a\in E$ נגדיר טרנספורמציה ליניארית $T_a:E\to R$ ע"י $T_a(x)=(a,x)$.
א) עבור כל $a\in E$ מצאו $\dim(Ker(T_a))$.
ב) עבור כל זוג $a,b\in E$ מצאו $\dim(Ker(T_a)\cap Ker(T_b))$.
ג) עבור כל $a\in E$ מצאו היטל $pr_{Ker(T_a)}(a)$ של $a\in E$ על $Ker(T_a)$.