

תרגיל 3. מטריצות.

(1) עבור המטריצות הבאות חשבו $A^2, B^3, C^4, C^T, (C^T)^T, DC, CD^T, (DC)^T, C^T D^T, AE, E^T B, (AB)D, A(BD), E^T E, EE^T$ כאשר X^T היא מטריצה משוחלפת ל X .

$$A = \begin{pmatrix} 1i & 2i & 3i \\ 1i & 0 & 1i \\ 2i & 0 & 3i \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -4 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3+i & -2 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 2i \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

(2) עבור המטריצות A הבאות חשבו A^n

$$a) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, b) \begin{pmatrix} i & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, c) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1+7i & 0 & 0 \\ 1-8i & 1+9i & 0 \end{pmatrix}, d) \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(3) עבור המטריצות הבאות חשבו A^{-1}, B^{-1}, C^{-1} ופתרו את המשוואות הבאות:

a) $AXA^{-1} = D$, b) $AXB = D$, c) $BXBA = D$, d) $CX = E$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 5 & 3 & 0 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(4) ידוע כי A היא מטריצה מסדר 5×6 . מצאו את הסדר של B אם:

א) AB ו BA מוגדרות.

ב) AB^T ו $B^T A$ מוגדרות.

(5) הוכיחו כי

א) $M^T M, MM^T$ מוגדרות כאשר M מטריצה מסדר כלשהו.

ב) M^2 קיים אם ורק אם M מטריצה ריבועית.

(6) נתונה המטריצה $A = \begin{pmatrix} 1+i & 2i \\ 3 & -i \end{pmatrix}$

א) מצאו את A^{-1} .

ב) הביעו את A ו A^{-1} כמכפלה של מטריצות אלמנטריות.

ג) נניח ש B התקבלה מ A ע"י החלפת שורה ראשונה ושנייה. השתמשו בסעיף א) על מנת למצוא את B^{-1} .

(7) כמו (6) עבור $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ רק הפעם עבדו מעל השדה Z_2 בן 2 איברים.

(8) הוכיחו או הפריכו:

א) $AB = 0 \Leftrightarrow A = 0 \vee B = 0$.

ב) $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2 \Leftrightarrow AB = BA$.

ג) אם A, B הפיכות ו $A+B \neq 0$ אז $A+B$ הפיכה.

(9) נתונה המטריצה $A = \begin{pmatrix} 1+i & 1-i \\ 1 & -i \end{pmatrix}$. מצאו את כל המטריצות B שמתחלפות עם A .

(8) נתונות המטריצות הבאות התלויות בפרמטר k .

$$A = \begin{pmatrix} k & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & k \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & k & -1 & 2 \\ 2 & -1 & k & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & k \\ k & 3 & -k-5 \end{pmatrix}$$

א) לאילו ערכים של k המטריצות הפיכות? מהי הדרגה במקרים אלו?
ב) לאילו ערכים של k המטריצות לא הפיכות? מהי הדרגה במקרים אלו?
9) ידוע כי A היא מטריצה ריבועית ו I היא מטריצת היחידה.

א) נתון כי $A^2 = 0$. הוכיחו כי $(I - A)$ הפיכה ומצאו את $(I - A)^{-1}$.

ב) נתון כי $A^3 = 0$. הוכיחו כי $(I - A)$ הפיכה ומצאו את $(I - A)^{-1}$.

ג) נתון כי $A^n = 0$. הוכיחו כי $(I - A)$ הפיכה ומצאו את $(I - A)^{-1}$.

בהצלחה!