

תרגיל 6. חלק א: תלות ליניארית. בסיס ומימד.

1) קבעו האם הוקטורים הבאים תלויים או בלתי תלויים ליניארית מעל שדה  $F$ :

- (א)  $F = \mathbb{R}$ ,  $(2, 1, -1)$ ,  $(1, -1, 3)$ ,  $(1, 9, -11)$   
 (ב)  $F = \mathbb{Q}$ ,  $(1, -2, 4, 1)$ ,  $(2, 1, 0, -3)$ ,  $(3, -6, 1, 4)$   
 (ג)  $F = \mathbb{C}$ ,  $(1+i, i, 1-i)$ ,  $(1-i, 1, -1-i)$ ,  $(3+2i, -1+2i, 2-i)$   
 (ד)  $F = \mathbb{Z}_2$ ,  $(1, 0, 1)$ ,  $(1, 1, 0)$ ,  $(1, 1, 1)$

2) מצא ערכי הפרמטר עבורם הוקטורים הבאים תלויים ליניארית:  
 (א)  $\mathbf{a} = (2, 1, -1)$ ,  $\mathbf{b} = (1, m, 3)$ ,  $\mathbf{c} = (1, 9, -11)$ ;  
 (ב)  $\mathbf{a} = (3, -2, 1)$ ,  $\mathbf{b} = (2, 1, -3m+1)$ ,  $\mathbf{c} = (m, -1, -2)$

3) (א) בדקו כי ווקטורים  $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$  מהווים בסיס של מרחב פתרונות של מערכת

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_4 = 0 \end{cases} \text{ משוואות ליניאריות}$$

(ב) השלימו את הבסיס מסעיף א) לבסיס של מרחב פתרונות של משוואה  $5x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 = 0$

(ג) בחרו בין ווקטורים הבאים  $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$  כל תתי סדרות

שמהווים בסיס של מרחב פתרונות של משוואה  $5x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 = 0$ .

4) נתונה מטריצה  $A$  בגודל  $3 \times 4$  ונתון כי  $A$  מדורגת ללא שורות אפסים. הראו כי השורות של  $A$  הן בלתי תלויות ליניאריות.

5) יהי  $V$  מרחב הפונקציות הרציפות בקטע  $[0, 1]$  ונתבונן בשני ווקטורים במרחב זה: הפונקציות  $\sin(x)$ ,  $\cos(x)$ .

(א) הראו כי ווקטורים אלו אינם תלויים ליניארית מעל  $\mathbb{R}$ .

(ב) מצאו בסיס לתת המרחב הנפרש על ידי  $\sin(x)$ ,  $\cos(x)$ ,  $\sin^2(x)$ ,  $\cos^2(x)$ .

(ג) הראו כי אוסף הפונקציות הממשיות המקיימות  $f' = f$  היא תת מרחב ליניארי של  $V$  ומצאו וקטור שונה מאפס בתת מרחב זה.