תרגיל 6. חלק ב: תתי מרחבים. בסיס, מימד, סכום וחיתוך של מ"וו.

1)

א) הראו כי קבוצת המטריצות הסימטריות במרחב $M_{2\times 2}(R)$ מהווה תת מרחב וקטורי מעל הממשיים וקבעו את המימד שלה. הכלילו למטריצות בגודל n.

ב) קבעו האם קבוצת המטריצות שאינן הפיכות במרחב $M_{2\times 2}(R)$ מהווה תת מרחב וקטורי.

ג) יהי V מרחב הפולינומים ממעלה לכל היותר חמש מעל שדה המרוכבים.
מצאו בסיס ל V כמרחב וקטורי מעל הממשיים. מה מימדו של V?
תהא W תת הקבוצה של V המורכבת מפולינומים המקיימים
p(x)=xp'(x)-2p''(x). הראו כי W תת מרחב של V וקבעו עבורו בסיס.

2) הראו אלגוריתם המוצא בסיס עבור תת המרחב Span(S) במרחב וקטורי V. כאן S קבוצה כלשהיא ב V. הוכיחו את נכונות האלגוריתם.
רמז: קבעו בסיס ב V וייצגו את איברי S באמצעות וקטורי הבסיס B.

3) הראו כי אם U ו W תתי מרחבים של מרחב V ואם איחודם מהווה תת מרחב הרי U מוכל ב W או ש W מוכל ב U. האם ההפך נכון ?

4) נתבונן בתתי מרחבים של $M_{2\times 2}(R)$:

$$U=\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a-b+c-d=0\}, V=Span(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix})$$

א) מצא בסיס והמימד של U, $U+V$ ושל $U\cap V$

ב) השלימו בסיס של $U\cap V$ לבסיס של $U+V$.

5) תהי $W=\left\{ax^3+bx^2+cx+d \mid a+b+c+d=0\right\}$ מרחב ווקטורי.
תהי $U(k)=Span(kx^3+x^2+x,\ x^3+kx^2+x, x^3+x^2+kx)$ מרחב ווקטורי.
עבור אילו ערכים של פרמטר k מתקיים

א) $W+U(k)=C_{\le 3}[x]$.

ב) $W\cap U(k)=\{\bar{0}\}$.

6) ידוע כי הווקטורים $a_1,...,a_n$ בת"ל. עבור כל $n\ge 3$ בדקו האם הווקטורים $(a_1+a_2),(a_2+a_3)...,(a_{n-1}+a_n),(a_n+a_1)$ בת"ל.

7) הבסיס של מ"ו U הוא $B_U=(u_1,u_2)$. הבסיס של מ"ו V הוא $B_V=(v_1,v_2,v_3)$.
ידוע כי $U\cap V=\{0\}$.

א) הוכיחו כי u_1,v_3 בת"ל.

ב) הוכיחו כי הבסיס של מ"ו $U+V$ הוא $B_{U+V}=B_U\cup B_V$.

8) יהיו U ו- W תת-מרחבים של $M_{2\times2}(Q)$. ידוע כי:
$\begin{pmatrix}-2&1\\2&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}4&2\\4&-2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&3\\6&0\end{pmatrix}$ ו- $\begin{pmatrix}0&2\\1&0\end{pmatrix}$ הם איברים של U.
$\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1&-2\\-2&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3&3\\3&-6\end{pmatrix}$ ו- $\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ הם איברים של W.
ו- U אינו מוכל ב- W ו- W אינו מוכל ב- U.
מצאו בסיסם ומימדים עבור U, $U\cap W$ ו- $U+W$. מהו המימד של W?

9) יהיו U,W_1 ו- W_2 תת-מרחבים של מרחב ווקטורי נפרש סופית V. הוכיחו או הפריכו:

א) אם $\dim(W_1)+\dim(W_2)>\dim(V)$ אז $W_1\cap W_2\neq\{\bar{0}\}$.

ב) אם $\dim(W_1+W_2)=1+\dim(W_1\cap W_2)$ אז $W_1\neq W_2$ וגם ($W_1\subseteq W_2$ או $W_2\subseteq W_1$)

ג) אם $U+W_1=U+W_2$ אז $W_1=W_2$.

ד) אם $U+W_1=U+W_2$ אז $\dim(W_1)=\dim(W_2)$.

10) בשאלה זו אנו עוסקים במרחב הפולינומים

$C_{\le4}[x]=\{f(x)=a_4x^4+...+a_1x+a_0\mid a_4,...,a_0\in C\}$, ובתתי המרחב שלו:

$U=\{f(x)\in C_{\le4}[x]\mid f(i)=0,\ f(-i)=0\}$ ו- $V=\{f(x)\in C_{\le4}[x]\mid f(-1)=0,\ f(1)=0\}$.

א) מצאו בסיס של מרחב ווקטורי V כך ש- $U\oplus V=C_{\le4}[x]$. האם מרחב ווקטורי V כך ש- $U\oplus V=C_{\le4}[x]$ יחיד? נמקו את התשובה.

ב) האם קיים בסיס B של $C_{\le4}[x]$ מורכב מפולינומים $f(x)$ שמקיימים תנאי $f(i)=0$ או $f(-i)=0$. אם כן מצאו בסיס כזה אם לא נמקו.

ג) מצאו בסיס של מרחב ווקטורי U שמכיל פולינום x^4+2x^2+1.

11) מה המימדים האפשריים של חיתוך המרחבים U ו W אם מימד כ"א מהם הוא חמש ושניהם תתי מרחבים של מרחב שמונה מימדי ? הראו כי כל אפשרות שאתם טוענים שאפשרית אכן מתממשת בדוגמא.