③ נתון ש $[T]_E^E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ומוגדר העתקה T כאשר

נסמן ב D בסיס מתאים כך ש"המטריצה של T ביחס" D היא אלכסונית.

נחשב את הפולינום האופייני, ונמצא את הע"ע.

$$P_T(x) = \left| \begin{pmatrix} x & 0 & -1 & 0 \\ 0 & x & 0 & -1 \\ -1 & 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x-1 \end{pmatrix} \right| = x^3(x-1) + (-1)\cdot(-1)\cdot \begin{vmatrix} 0 & x & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= x^3(x-1) + (-1)\cdot\left[0\cdot(-1) + x\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} + 0\cdot 0\right] = x^3(x-1) - x(-1-x) =$$

$$= (x-1)x^2(x+1)$$

לכן יש 3 ע"ע $0, 1, -1$.

נקבע ע"ע $\lambda = 1$ [כיצד אלגברי של $0 = 1$ = כיצד גאומטרי
" " של $-1 = 1$ = כיצד גאומטרי.

$\lambda = 1$: $T(f(x)) = 1 - f(x) \iff$ נמצא כיצד גאומטרי של

$$T(ax^3+bx^2+cx+d) = dx^3+cx^2+bx+a \iff ax^3+bx^2+cx+d = dx^3+cx^2+bx+a \iff a=d, b=c.$$

לכן x^3+x, x^2+1 מהווים בסיס למ"ע עם ע"ע $\lambda = 1$.

$\lambda = 0$: נקבע ע"ע λ הוא מצורף ולכן $T(x^2) = 2x^2 = 0\cdot x^2$

$\lambda = -1$: $T(f(x)) = -1\cdot f(x) \iff ax^3+bx^2+cx+d = -dx^3-cx^2-bx-a$

$\iff a=-c, b=-d, c=-a, d=-b$

$\iff c=-a$, $b=d=0$

לכן $x-x^3$ הוא ו"ע למ"ע.

לסיכום נקבל $D = \{\underbrace{x^2}_{\lambda=0}, \underbrace{x^2+1, x^3+x}_{\lambda=1}, \underbrace{x-x^3}_{\lambda=-1}\}$

ואז $[T]_D^D = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$.