<u>שאלה 2</u>

נגדיר וקטורים $w=\begin{pmatrix} i\\ i\\ i\end{pmatrix}$, $v=\begin{pmatrix} i\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$, $u=\begin{pmatrix} i\\ i\\ 0\end{pmatrix}$.

על אופרטור ליניארי $T:C^3\to C^3$ ידוע כי

- $\operatorname{Im}(T)=Span(u,v)$
- הוקטור w הוא וקטור עצמי של T
- לכל $x\in\operatorname{Im}(T)$ מתקיים $T(x)=x$

(5 נקי) **א)** הראו כי אפס הוא ע"ע של T.

(9 נקי) **ב)** מצאו ערכים עצמיים, וקטורים עצמיים עבור T. האם T לכסין?

(5 נקי) **ג)** הראו כי אופרטור T המקיים הדרישות הנ"ל הוא יחיד ומצאו נוסחה עבור $T\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}$.

(5 נקי) **ד)** יהי $d=\begin{pmatrix} 1\\ 2\\ 3\end{pmatrix}$

הציגו את הוקטור d כסכום של ו"ע של T וחשבו את $(T-3I)^{-1}d$

(3 נקי) **ה)** הראו כי $T^2=T$.

פתרון. א) שיטה 1. וקטורים $\begin{pmatrix} i\\ 0\\ 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix} i\\ i\\ 0\end{pmatrix}$ לא פרופורציונליים לכן בת"ל לכן מהווים בסיס של $\operatorname{Im}(T)$

קיבלנו ש- $\dim(\operatorname{Im}(T))=2$ לכן $\dim(KerT)=\dim(C^3)-\dim(\operatorname{Im}(T))=3-2=1$ לכן קיים וקטור שונה מ-0 ששייך ל-ע"ע 0 לכן אפס הוא ע"ע של T.

שיטה 2. ידוע כי w הוא וקטור עצמי של T ז"א $T(w)=\alpha w$. נניח ש- $\alpha\neq 0$ אז $w=\frac{1}{\alpha}T(w)\in\operatorname{Im}(T)=Span(u,v)$ אבל קבוצה וקטורים (u,v,w) בת"ל לכן $\alpha=0$

ז"א w ו"ע של T ששייך לע"ע 0.

ב) לכל $x\in\operatorname{Im}(T)$ מתקיים $T(x)=x$ לכן 1 הוא ע"ע של T ואם $T(x)=x$ אז $x\in\operatorname{Im}(T)$

לכן $\operatorname{Im}(T)=Span(u,v)=Span(\begin{pmatrix} 1\\ 1\\ 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix} 1\\ 0\\ 0\end{pmatrix})$ הוא מרחב עצמי של T ששייך לע"ע 1 וכל וקטור שונה מ-0 מ- $\operatorname{Im}(T)$ הוא ו"ע של T ששייך לע"ע 1 ז"א ו"ע של T ששייך לע"ע 1 הוא וקטור

מהצורה $\alpha\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ כאשר $\alpha,\beta\in C;\alpha^2+\beta^2\neq 0$.

1 הוא ע"ע של T עם ריבוי גאומטרי (ר"ג) 2. בסעיף א) קיבלנו כי אפס הוא ע"ע של T עם ריבוי גאומטרי (ר"ג) לפחות 1. מפני שסכום של ר"ג של ע"ע של אופרטור ליניארי $T:C^3\to C^3$ לא גדול מ-3 מקבלים כי 0 הוא ע"ע של T עם ריבוי גאומטרי (ר"ג) 1 ואין ע"ע שונים מ-0 ומ-1.
קבוצה וקטורים (u,v,w) בת"ל לכן הם מהווים בסיס של C^3 ו-$w\notin \mathrm{Im}(T)$. קיבלנו ש-w הוא ו"ע של T ששייך לע"ע 1 ולכן ו"ע של T ששייך לע"ע 1 הוא וקטור מהצורה αw כאשר $\alpha\in C;\alpha\neq 0$.

וקטורים עצמיים של T (u,v,w) מהווים בסיס של C^3 ולכן T לכסין.

ג) תמונות של וקטורים מבסיס (u,v,w) מוגדרים לפי הנתונים: $T(u)=u,T(v)=v,T(w)=0$
לכן אופרטור T המקיים הדרישות הנ"ל הוא יחיד.

$$T\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix};\ T\left(\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right)=T\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix};\ T\left(\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right)=T\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\-1\\0\end{pmatrix}$$

לכן $$T\left(\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\right)=xT\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right)+\mathrm{y}T\left(\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right)+zT\left(\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right)=x\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+z\begin{pmatrix}-1\\-1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x-z\\y-z\\0\end{pmatrix}$$

אפשר גם לפתור בעזרת מטריצה מייצגת.

ד) $d=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=3\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\3\\3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1\\-1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix}$. ידוע כי ו"ע a של T ששייך לע"ע γ
נשאר ו"ע של $(T-3I)^{-1}$ ששייך לע"ע $(\gamma-3)^{-1}$ לכן

$$(T-3I)^{-1}d=3(0-3)^{-1}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}-(1-3)^{-1}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}-(1-3)^{-1}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\-1\\-1\end{pmatrix}+\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-1/2\\-1\end{pmatrix}$$

ה) $T(x)\in \mathrm{Im}(T)$ לכן לפי נתון $T^2(x)=T(T(x))=T(x)$ לכל $x\in C^3$ לכן $T^2=T$**.**

<u>הערה חשובה</u> בכל שלב של פתרון אפשר להשוות את התוצאות עם הנתונים ולבדוק.
לדוגמה אם $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ הוא ו"ע של T ששייך לע"ע 0 אז $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\in Ker(T)$ ונקבל סתירה עם משפט המימדים, עוד דוגמה: אם $T\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ אז $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ לא ו"ע של T ומקבלים סתירה לנתון.