פתרון של שאלה 3

א. נניח שקיים לסתירה:

$$A^{-1}(AB) = A^{-1}\cdot 0_{n\times m} = 0_{n\times m}$$

אבל גם

$$A^{-1}\cdot(AB) = (A^{-1}A)B = I_{n\times n}B = B$$

לכן $B=0_{n\times m}$ כנדרש.

ב. כיוון ש-A אינה הפיכה קיים $0\neq x\in F^{n\times 1}$ כך ש-$Ax=0$.

תהי B מטריצה $n\times n$ עם עמודות $x,0,\dots,0$.
אז $B\neq 0$ והעמודות של AB
הן $Ax, A0,\dots,A0$, כלומר כולן אפס, כלומר $AB=0$.

ג. נשים לב כי

$$T^4(v_1) = T^3(Tv_1) = T^3(v_2) = T^2(Tv_2) = T^2v_3 = T(Tv_3) = Tv_4 = v_1$$

ובאותה צורה

$$T^4v_2 = v_2,\quad T^4v_3 = v_3,\quad T^4v_4 = v_4$$

לכן $T^4 = I_V$ (כי שוות על וקטורי הבסיס

ולא. אחרת אם נניח V), נקבל כי

$$T^4 - I_V = (T^2 - I_V)(T^2 + I_V)$$

לכן

$$T^4 - I_V = 0$$

$$\Rightarrow (T^2 - I_V)(T_2 + I_V) = 0$$

כיוון כי $S = T^2 + I_V \neq 0$

(לדוגמה, $Sv_1 = T^2 v_1 + v_1 = v_3 + v_1 \neq 0$ כי v_1 ו-v_3

(מהמשפט) לכן לפי טענה זו $T^2 - I_V$ ולא שווה

הוכחנו. (כמו כן, ניתן לראות את

המטריצה המייצגת של $T^2 - I_V$ אינה ס

ולא שווה אפס כלל.)