תאריך: 20.2.2014

מרצה: אריאל ידין

שם הקורס: תורת המידה

מספר הקורס: 201.1.0081

שנה: 2014 סמסטר: א מועד: ב

משך הבחינה: 3 שעות

אין חומר עזר

בהצלחה!

חלק א: שאלת חובה: הגדרות ומשפטים

חלק זה שווה 25 נקודות

(א) | 9 נקי |

הגדירו מהו אינטגרל של פונקציה פשוטה ושל פונקציה (מדידה) אי-שלילית.

Define the integral of a simple function and of a (measurable) non-negative function.

(ב) | 8 נקי |

נסחו את משפט ההתכנסות הנשלטת

State the dominated convergence theorem.

(ג) | 8 נקי |

הגדירו מהן מידות סינגולריות (עבור מידות חיוביות). כלומר הגדירו $\nu \perp \mu$.

Define the notion of singular measures (for positive measures); that is define $\nu \perp \mu$.

חלק ב: הוראות:

בחלק זה עליכם לבחור 3 שאלות מתוך 4 (שלוש בלבד)

כתבו בתחילת המחברת באופן ברור על אלו שאלות עניתם

כתבו באופן ברור את תשובותיכן, ונמקו כל תשובה באופן מתמטי

שאלה 1: נתון מרחב מידה $(X,\mathcal{F},\mu)$. נניח ש-$(A_n)_n$ סדרה בתוך $\mathcal{F}$.

נגדיר:

$$\liminf A_n := \bigcup_k \bigcap_{m\geq k} A_m \qquad \text{וגם} \qquad \limsup A_n := \bigcap_k \bigcup_{m\geq k} A_m.$$

(א) | 15 נק׳ |

הראו שמתקיים:

$$\mu(\liminf A_n) \leq \liminf_{n\to\infty} \mu(A_n).$$

(ב) | 10 נק׳ |

הראו שאם $\mu(\bigcup_n A_n) < \infty$, אז מתקיים:

$$\limsup_{n\to\infty} \mu(A_n) \leq \mu(\limsup A_n).$$

Let $(X,\mathcal{F},\mu)$ be a measure space. Let $(A_n)_n$ be a sequence in $\mathcal{F}$.

Define

$$\liminf A_n := \bigcup_k \bigcap_{m\geq k} A_m \qquad \text{and} \qquad \limsup A_n := \bigcap_k \bigcup_{m\geq k} A_m.$$

(a) | 15 |

Show that

$$\mu(\liminf A_n) \leq \liminf_{n\to\infty} \mu(A_n).$$

(b) | 10 |

Show that if $\mu(\bigcup_n A_n) < \infty$ then

$$\limsup_{n\to\infty} \mu(A_n) \leq \mu(\limsup A_n).$$

שאלה 2: | 25 נקי |

נתון $X = \mathbf{R}$, המספרים הממשיים, ו-$\mathcal{F}$ σ-אלגברה בורל על X.

נניח λ מידת לבג על $(X, \mathcal{F})$, וכן μ מידה σ-סופית על $(X, \mathcal{F})$ המקיימת $\mu << \lambda$.

נניח $f \in L^1(X, \mathcal{F}, \mu)$ פונקציה אי-שלילית ונגדיר פונקציה $F : \mathbf{R} \to [0, \infty)$

$$F(x) := \int_{(-\infty, x]} f d\mu.$$

הראו ש-F רציפה.

Let $X = \mathbf{R}$ the real numbers and let $\mathcal{F}$ be the Borel σ-algebra on X. Let λ be Lebesgue measure on $(X, \mathcal{F})$ and let μ be a σ-finite measure on $(X, \mathcal{F})$ such that $\mu << \lambda$.

Let $f \in L^1(X, \mathcal{F}, \mu)$ be a non-negative function and define a function $F : \mathbf{R} \to [0, \infty)$ by

$$F(x) := \int_{(-\infty, x]} f d\mu.$$

Show that F is a continuous function.

שאלה 3: | 25 נקי |

נתונה קבוצה חסומה $A \subset \mathbf{R}^d$. הראו שהתנאים הבאים שקולים:

(א) A מדידה Jordan

(ב) לכל $\varepsilon > 0$ קיימות קבוצות אלמנטריות $E \subset A \subset F$ כך ש-$m(F \setminus E) < \varepsilon$.

(ג) לכל $\varepsilon > 0$ קיימת קבוצה אלמנטרית E כך ש-$J^*(A \triangle E) < \varepsilon$.

Let $A \subset \mathbf{R}^d$ be a bounded set. Show that the following are equivalent.

(a) A is Jordan-measurable.

(b) For every $\varepsilon > 0$ there exist elementary sets $E \subset A \subset F$ such that $m(F \setminus E) < \varepsilon$.

(c) For every $\varepsilon > 0$ there exists an elementary set E such that $J^*(A \triangle E) < \varepsilon$.

שאלה 4: נניח μ, ν מידות σ-סופיות על $(X, \mathcal{F})$ כך ש-$\nu << \mu$.

נגדיר: $\lambda = \nu + \mu$.

(א) | 6 נקי |

הראו ש-$\nu << \lambda$

(ב) | 6 נקי |

הראו ש-$\lambda << \mu$

(ג) | 7 נקי |

הראו של-μ-כמעט-כל $x \in X$ מתקיים $0 \leq \frac{d\nu}{d\lambda}(x) < 1$.

(ד) | 6 נקי |

הראו ש-μ-כמעט-בכל-מקום מתקיים

$$\frac{d\nu}{d\mu} = \frac{\frac{d\nu}{d\lambda}}{1 - \frac{d\nu}{d\lambda}}.$$

Let μ, ν be σ-finite measures on $(X, \mathcal{F})$ such that $\nu << \mu$. Let $\lambda = \nu + \mu$.

(a) | 6 |

Show that $\nu << \lambda$.

(b) | 6 |

Show that $\lambda << \mu$.

(c) | 7 |

Show that $0 \leq \frac{d\nu}{d\lambda}(x) < 1$ for μ-a.e. $x \in X$.

(d) | 6 |

Show that μ-a.e.

$$\frac{d\nu}{d\mu} = \frac{\frac{d\nu}{d\lambda}}{1 - \frac{d\nu}{d\lambda}}.$$